

「GPS/GNSS測位の数理と応用特集号」

解 説

GPS/GNSS 測位における整数値バイアスの
推定アルゴリズム

久保 幸弘*

1. はじめに

本稿では、搬送波位相を利用した場合のGPS/GNSS測位において問題となる、整数値バイアスの推定と決定に関わる理論について説明する。すでに本特集 [1] で解説されているように、この測位方式では搬送波の位相を観測することで、衛星と受信機間の距離を搬送波の位相 (GPS の場合 L1 波: 波長約 19 [cm], L2 波: 波長約 24 [cm]) を単位として測定する [2-6]。しかしながら、受信開始時には 1 波長内の位相が特定されるにとどまるため、測定された衛星と受信機間の距離には整数波長分の不確定なバイアス (整数値バイアス、またはアンビギュイティなどとよばれる) が含まれる。したがって、整数値バイアスは受信が途切れない限り一定の整数となるが、受信機の座標を得るためには、整数値バイアスを同時に推定するか、事前に決定しておかなければならず、現在までにさまざまな手法が提案されている [7-14]。

最も簡単な処理方法は、整数値バイアスを実数として取り扱うものであり [7]、長時間の観測を行えば、整数値バイアスの推定値はある整数値に収束していく。このように、整数値バイアスを実数と見なした場合の整数値バイアス、および位置の推定値は float 解とよばれる。また、整数値バイアスを整数として扱った場合は fix 解とよばれている。

一方、短い観測時間で高精度な測位を行うためには、整数値バイアスを整数として扱い、高速に推定、決定することが重要な鍵となる。整数値バイアスの推定、決定は、大まかにつぎの四つのステップにより行われる。

- (1) 整数値バイアスを実数と見なし float 解を求める。
- (2) float 解の周辺で整数値バイアスの候補を設定する。
- (3) 各候補について観測残差等の評価量を計算して、確率的、統計的な観点から fix 解の推定値を求める。
- (4) 上記で得られた推定値について検証を行い、fix 解として採用するか否かを判定する。

とくに、ステップ (2)、(3) を実行するため、たとえば文献 [8-14] などのアルゴリズムでは、基本的に最小 2 乗規範のもとで整数値バイアスについての探索を行っているが、探索を容易にするため、Teunissen による LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation

Adjustment) 法 [8]、文献 [13,14] などでは、整数値バイアスに関する最小 2 乗問題を、特殊な線形変換を用いて効果的に解いている。Frei ら [9] は float 解の共分散行列の情報を利用して、整数値バイアスの候補数を減少させる FARA (Fast Ambiguity Resolution Approach) を開発した。Hatch [10] は、冗長な観測を用いて候補を絞り込む LSAST (Least Squares Ambiguity Search Technique) を提案した。また、Park ら [11] による ARCE (Ambiguity Resolution using Constraint Equation) や文献 [12] の手法では、観測の冗長性を利用して、測位点の座標に関する未知量を消去し、整数値バイアスのみを取り扱っている。また、上記の手順によらない方法として、Counselman ら [15] は複素指数関数を用いた“アンビギュイティ関数”を導入した手法を提案している。整数値バイアスの推定問題については、これらの他にも多くの方法が発表されており、文献 [16-18] などに紹介されている。

本稿では、これらの整数値バイアス推定手法の中でも代表的である FARA 法および LAMBDA 法について解説を行う。また、整数値バイアスの検証手法についてもその例を紹介する。

2. 観測モデル

搬送波位相を用いた測位法としては、複数の受信機間の相対位置を求める相対測位法が一般的であるが、近年では、高精度単独測位法 (Precise Point Positioning; PPP) [19,20] や、GPS ジャイロ [21] などでも搬送波位相観測量が活用されている。これらの測位法では、搬送波位相観測量に対して 2 重位相差、1 重位相差、電離層フリー結合等の前処理 [6,22] が施されることがある。また、受信機が静止 (スタティック測位) しているか移動 (キネマティック測位) しているかによって、推定すべき未知量が変化する [23]。

本稿では一般性を失うことなく、受信機は静止しており、電離層および対流圏による伝搬遅延、マルチパスの影響、サイクルスリップなど [3] は発生していないものとし、 n_s 個の搬送波位相観測量が得られていると仮定する。このとき、最小 2 乗法または拡張カルマンフィルタの適用のため、適切な線形化を行うと、時刻 (観測エポック) i における搬送波位相観測量の観測モデルは以下のように表すことができる。

* 立命館大学 理工学部

Key Words: GPS, ambiguity, estimation, validation.

$$\mathbf{y}(i) = C(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{n}(i) + \mathbf{v}(i) \quad (1)$$

$$= H(i)\boldsymbol{\eta}(i) + \mathbf{v}(i) \quad (i=1, 2, \dots, n_d) \quad (2)$$

ただし, n_d : 観測エポック数, $\mathbf{y}(i) \in \mathbf{R}^{n_s}$: 搬送波位相観測値から計算される量, $\mathbf{x}(i) \in \mathbf{R}^3$: 受信機の座標, $C(i) \in \mathbf{R}^{n_s \times 3}$: 衛星-受信機の幾何学的な配置から定まる既知行列, $\mathbf{n}(i) \in \mathbf{Z}^{n_s}$: 整数値バイアスであり,

$$H(i) \equiv [C(i) \quad I_{n_s}] \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\eta}(i) \equiv [\mathbf{x}^T(i) \quad \mathbf{n}^T(i)]^T \quad (4)$$

である. また, 観測雑音 $\mathbf{v}(i) \in \mathbf{R}^{n_s}$ は正規性の白色雑音と仮定し,

$$E[\mathbf{v}(i)] = 0, \quad E[\mathbf{v}(i)\mathbf{v}^T(i)] = R = \sigma^2 \tilde{R}$$

とする. ただし, \tilde{R} は観測量に対する前処理により生じる $n_s \times n_s$ の重み行列, σ は個々の位相観測に伴う雑音の標準偏差である. たとえば, 搬送波位相観測量として 2 重位相差を用いる場合は,

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 4 & & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

となることが知られている [6].

搬送波位相観測値は, 受信機において受信した搬送波の位相を連続的に積算することにより得られるものである. 観測が中断されない限り, 整数値バイアス \mathbf{n} は一定の整数値をとる. また, 本稿では受信機が静止していると考えているため, 受信機座標 \mathbf{x} も一定値となる.

3. 整数値アンビグイティの推定

3.1 FARA 法

FARA 法 (Fast Ambiguity Resolution Approach) は第 1 節で述べた (1)~(4) のステップにより整数値バイアスを決定するアルゴリズムであり, 推定値の統計的性質を利用して整数値バイアスの候補を絞り込むという特徴をもつ. とくに (2), (3) のステップでは, 多変量解析, 特に線形回帰モデルに対する区間推定, 統計的検定法が用いられ, t 分布, χ^2 分布, F 分布を用いた統計的手法が活用されている. FARA 法は, スイスのベルン大学 (Universität Bern) で開発されている基線解析ソフト Bernese の整数値バイアス推定アルゴリズムの一つとして採用されている [24]. なお, Bernese は国土地理院が全国約 1200 点に受信機を配置し運用している, GPS 連続観測システム (GEONET; GPS Earth Observation Network system) の解析ソフトの一つとして採用されているものである [25].

FARA 法のアルゴリズムは以下のようになっている. 観測方程式 (2) 式に対して, 観測値 $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(j)$ を用いて, 重み付き最小 2 乗法を適用し, マルコフ推定値 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)$

を求める [26]. すなわち $\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)$ は

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}(j) &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^{3+n_s}} \sum_{k=1}^j \|\mathbf{y}(k) - H(k)\boldsymbol{\eta}(k)\|_{R^{-1}(k)}^2 \\ &= Q(j) \left[\sum_{k=1}^j \left\{ H^T(k) \tilde{R}^{-1}(k) \mathbf{y}(k) \right\} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ただし } Q(j) \equiv \left[\sum_{k=1}^j \left\{ H^T(k) \tilde{R}^{-1}(k) H(k) \right\} \right]^{-1} \quad (7)$$

として得られる. このとき, $\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)$ の分布は

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(j) \sim \mathcal{N}[\boldsymbol{\eta}, \sigma^2 Q(j)] \quad (8)$$

であり, σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2$ は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k=1}^j \|\mathbf{y}(k) - H(k)\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)\|_{R^{-1}(k)}^2}{m_j} \quad (9)$$

となる. ただし, $m_j \equiv n_s j - (n_s + 3)$ である. このとき,

$$\frac{m_j \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m_j) \quad (10)$$

と自由度 m_j の χ^2 分布に従うことが示される.

ここで得られた推定値 $\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)$ は, (4) 式より

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(j) = [\hat{\mathbf{x}}^T(j) \quad \hat{\mathbf{n}}^T(j)]^T \quad (11)$$

であり, 整数値バイアスの推定値 $\hat{\mathbf{n}}$ を実数値として含んでいる. FARA 法では, $\hat{\boldsymbol{\eta}}(j)$ を利用して, 整数値としての推定値 $\hat{\mathbf{n}}(j)$ を得るために, t 分布を用いて信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間を求め, 整数値バイアスの候補を求める. すなわち, \mathbf{n} および $\hat{\mathbf{n}}(j)$ の l 番目の要素をそれぞれ $n_l, \hat{n}_l(j)$ とすれば, (8), (10) 式より,

$$\frac{\hat{n}_l(j) - n_l}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 [Q(j)]_{3+l, 3+l}}} \sim t(m_j) \quad (12)$$

($[Q(j)]_{3+l, 3+l}$ は $Q(j)$ の $(3+l)$ 番目の対角要素)

となり, (12) 式の左辺は自由度 m_j の t 分布に従う [27]. したがって,

$$\varepsilon_l(j) \equiv \sqrt{\hat{\sigma}^2 [Q(j)]_{3+l, 3+l}} \quad (13)$$

$t_{\alpha/2}(m_j)$ を自由度 m_j の t 分布の上側確率 $\alpha/2$ 点とし,

$$\begin{aligned} P[\hat{n}_l(j) - \varepsilon_l(j)t_{\alpha/2}(m_j) \leq \check{n}_l(j) \\ \leq \hat{n}_l(j) + \varepsilon_l(j)t_{\alpha/2}(m_j)] = 1 - \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

を満たす整数値を, $\check{n}_l(j)$; $l=1, \dots, n_s$ の候補とすることができ.

整数値バイアス候補の絞り込み

上述のようにして得られた \check{n}_l の候補の数を N_l とする. このとき, ベクトル $\check{\mathbf{n}}$ の組合せは, $\prod_{l=1}^{n_s} N_l$ となる. 観測する衛星数や周波数, 推定精度により違いはあるが, たとえば五つの搬送波位相観測量があり ($n_s=5$), 各々

の整数値バイアスにそれぞれ ± 10 サイクルの不確定さ ($N_l = 20; l = 1, \dots, 5$) があるとすると, $\hat{\mathbf{n}}$ の候補は 320 万通りとなる. FARA 法では, 整数値バイアスの各要素間の相関を用いて, さらに候補を絞り込む.

いま \mathbf{n} の l 番目, k 番目の要素の差を $n_{lk} = n_l - n_k$ と定義し, $\hat{n}_{lk}(j)$ について, t 分布を用いた信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間を求める. また, $\hat{n}_l(j), \hat{n}_k(j)$ の各候補について, 差 $\hat{n}_{lk}(j)$ を計算し, この信頼区間に含まれない候補を除くことにより, 候補点の数を減少させる. 差に関する t 分布を用いた区間推定は次式で与えられる.

$$P[\hat{n}_{lk}(j) - t_{\alpha/2}(m_j)\varepsilon_{lk}(j) \leq \hat{n}_{lk}(j) \leq \hat{n}_{lk}(j) + t_{\alpha/2}(m_j)\varepsilon_{lk}(j)] = 1 - \alpha \quad (15)$$

ただし

$$\hat{n}_{lk}(j) = \hat{n}_l(j) - \hat{n}_k(j), \quad \hat{n}_{lk}(j) = \hat{n}_l(j) - \hat{n}_k(j)$$

$$\varepsilon_{lk}(j) = \hat{\sigma}^2 \sqrt{[Q(j)]_{s,s} - 2[Q(j)]_{s,u} + [Q(j)]_{u,u}} \\ (s = l + 3, \quad u = k + 3)$$

FARA 法による候補の絞り込み効果については, 文献 [28] に詳しく紹介されている.

未知受信機位置座標の補正とその統計的検定

以上のように求められた整数値バイアスの候補 $\hat{\mathbf{n}}(j)$ に対する受信機位置座標 $\hat{\mathbf{x}}(j)$ の補正值 $\tilde{\mathbf{x}}(j)$ は

$$\tilde{\mathbf{x}}(j) = \hat{\mathbf{x}}(j) - Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{n}}} Q_{\hat{\mathbf{n}}}^{-1} \{\hat{\mathbf{n}}(j) - \hat{\mathbf{n}}(j)\} \quad (16)$$

で求められる. ただし, $Q_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{n}}}$ は, $\hat{\mathbf{x}}(j)$ と $\hat{\mathbf{n}}(j)$ の推定誤差の共分散であり, カルマンフィルタ適用時の推定誤差共分散 $P(j|j)$ の部分行列, あるいは (7) 式の部分行列から求めることができる. また, (16) 式で求められた補正位置ベクトル $\tilde{\mathbf{x}}(j)$ と補正前の位置ベクトル $\hat{\mathbf{x}}(j)$ との統計的検定を χ^2 分布を用いて行い, 最後に F 分布を用いて, 最良の候補と, 次点の候補との有意差の検定を行い, 最終的な解を求める [9].

3.2 LAMBDA 法

LAMBDA (Least-squares AMBiguity Decorrelation Adjustment) 法はオランダ, Delft 大学の P.J.G. Teunissen により提案された手法であり, 整数値バイアスの推定法として最も実用化が進んでいるアルゴリズムである. その名が示すように整数値バイアスの各要素の無相関化を行い, fix 解を求めるものであり [8, 29, 30], LAMBDA 法を応用した手法も各種考案されている [14, 31]. LAMBDA 法も, 基本的には第 1 節に示したステップにより推定を行うが, 具体的には

- 1) 最小 2 乗法で実数解を求める
- 2) 整数値バイアスの無相関化を行う
- 3) 整数解の探索空間を定め, 解を得る

という手順で処理を行う. LAMBDA 法ではステップ 2) で整数値バイアスの無相関化を行う点が特徴的である.

LAMBDA 法のアルゴリズムは以下のようになっている. まず, FARA 法と同様に整数値バイアスを実数と見なして, (6), (7) 式により float 解 $\hat{\mathbf{x}}(j), \hat{\mathbf{n}}(j)$ を求める.

整数値バイアスの推定問題は, $\hat{\mathbf{n}}(j)$ の近傍で適切な整数値を求める問題となるが, LAMBDA 法では, 整数解 $\tilde{\mathbf{n}}$ についての規範:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \underset{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^{n_s}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}\|_{Q_{\hat{\mathbf{n}}}^{-1}}^2 \quad (17)$$

により $\tilde{\mathbf{n}}$ を求める. ただし, \mathbf{Z}^{n_s} は n_s 次元の整数値空間であり, 簡単化のため時刻 j を省略して表記している. また整数解 $\tilde{\mathbf{n}}$ が求まると, FARA 法と同じく (16) 式により, 最小 2 乗解 $\tilde{\mathbf{x}}$ が求まる.

以上の計算過程での問題点は (17) 式での $\tilde{\mathbf{n}}$ の推定である. もし, (17) 式の最小 2 乗規範の重み行列である $Q_{\hat{\mathbf{n}}}^{-1}$ が対角行列であれば, $\tilde{\mathbf{n}}$ は $\hat{\mathbf{n}}$ の各要素を四捨五入することにより簡単に求められることは明らかである. しかしながら, 実際の測位においては, 2 重位相差や 1 重位相差といった処理の結果 $\hat{\mathbf{n}}$ の各要素が相関をもち, 単純な四捨五入では求めることができない. このために, LAMBDA 法では, 以下のような推定誤差共分散行列 $Q_{\hat{\mathbf{n}}}$ の対角化 ($\hat{\mathbf{n}}$ の無相関化) が提案されている.

無相関化と整数値の探索

(17) 式の float 解 $\hat{\mathbf{n}}$ の推定誤差共分散行列 $Q_{\hat{\mathbf{n}}}$ (対称行列) に対して, 直交行列 Z により対角化を行い, その対角行列を $Q_{\hat{\mathbf{z}}}$ とする. すなわち

$$Q_{\hat{\mathbf{z}}} = Z^T Q_{\hat{\mathbf{n}}} Z \quad (18)$$

である. ここで,

$$\hat{\mathbf{z}} = Z^T \hat{\mathbf{n}} \quad (19)$$

とすると, (17) 式は

$$\tilde{\mathbf{n}} = \underset{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m}{\operatorname{argmin}} (\hat{\mathbf{z}} - Z^T \mathbf{n})^T Q_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - Z^T \mathbf{n}) \quad (20)$$

と表現できる. (20) 式の $Q_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1}$ が対角行列であり, 整数 \mathbf{n} から変換された $\mathbf{z} \equiv Z^T \mathbf{n}$ も整数であれば, 四捨五入操作により推定値 $\tilde{\mathbf{n}}$ を求めることができる. しかし, \mathbf{z} が整数であるためには, 変換行列 Z およびその逆変換 Z^{-1} のすべての要素が整数である必要がある. 一般的に, このような条件のもとでは $Q_{\hat{\mathbf{z}}}$ を完全に対角化することは不可能であるため, LAMBDA 法では, LDL^T , UDU^T 分解 [32] を用いて, $Q_{\hat{\mathbf{z}}}$ がほぼ対角行列となる変換法が提案されている (詳細については [29, 30] を参照).

つぎに整数値バイアスの候補点を求めるため探索を行う. すなわち, 領域 (楕円体)

$$(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T Q_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \leq \tilde{\chi}^2 \quad (21)$$

内に含まれる整数点を探索する. $\tilde{\chi}^2$ は探索空間の大きさを決定するパラメータである. $Q_{\hat{\mathbf{z}}}$ は完全には対角化さ

れていないが、整数解の候補点の範囲が狭められており、この範囲に含まれる候補点の中で (20) 式の解を求める。

以下では、文献 [30] に基づいて、2次元の場合の変換行列 Z の計算方法および数値例の結果を示しておく。

2次元の場合の計算方法

2次元の場合、 n_1, n_2 の二つの整数値バイアスがあり、(18), (19) 式の変換は、 n_1 に関する変換と n_2 に関する変換に分けて行われる。いま、 \hat{n} の共分散行列が

$$Q_{\hat{n}} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

と表されるとする。このとき、

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lfloor q_{21}/q_{11} \rfloor & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

なる Z_1 を用いて n_1 に関する変換を行い

$$\tilde{Q}_{\hat{z}} = Z_1^T Q_{\hat{n}} Z_1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{z} = Z_1^T n \quad (24)$$

とする。ただし、 $\lfloor \cdot \rfloor$ は四捨五入を表す。さらに

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\lfloor \tilde{q}_{12}/\tilde{q}_{22} \rfloor \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

を用いて n_2 に関する同様の変換を行い、最終的に

$$Q_{\hat{z}} = Z_2^T Z_1^T Q_{\hat{n}} Z_1 Z_2, \quad z = Z_2^T Z_1^T n \quad (26)$$

とする。

2次元の場合の数値例

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} 1.05 \\ 1.30 \end{bmatrix}, \quad Q_{\hat{n}} = \begin{bmatrix} 53.4 & 38.4 \\ 38.4 & 28.0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

の場合について考える。正しい整数値バイアスは、

$$n = [2 \quad 2]^T \quad (28)$$

であり、単純に \hat{n} の四捨五入で解けない問題となっている。この場合、(22)~(26) 式より

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

となり、

$$Q_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 4.6 & 1.2 \\ 1.2 & 4.8 \end{bmatrix}, \quad \hat{z} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 1.80 \end{bmatrix} \quad (30)$$

が得られる。その結果、この場合においてはつぎのように \hat{z} に関する四捨五入によって正しい解が得られることがわかる。すなわち $\tilde{z} = \lfloor \hat{z} \rfloor = [0 \quad 2]^T$ とすると、

$$\tilde{n} = Z_1^{-T} Z_2^{-T} \tilde{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

しかしながら、この例題でもそうであるように、一般的には $Q_{\hat{z}}$ は完全には対角化されないで、(21) 式のような範囲を設定して探索が行われる。

以上のアルゴリズムのサンプルプログラムは、Fortran 版、Matlab 版ともに Delft 大学の Web ページで提供されている [33]。また、文献 [34] で述べられているように [35] では Matlab ソースコードが公開されている。

4. 整数値バイアスの検証

整数値バイアスの推定値 \tilde{n} が求まった後、その \tilde{n} が正しい値であるか否かを検証するアルゴリズムについても種々の方法が研究されている。たとえば、FARA 法の説明で述べたように、最良の候補と次点の候補に対する観測残差の比を用いた検定方法、確率比検定（尤度比検定）による方法や \tilde{n} が正しい ($\tilde{n} = n$) 確率を評価する方法などが提案されている。ここでは Hassibi-Boyd による LLL アルゴリズムを利用した整数値バイアス決定法 [13]（以下 HB-L³ 法）を取りあげ、求めた整数解 \tilde{n} が真の整数値バイアスである確率 P_c を計算するアルゴリズムについて紹介する。LLL アルゴリズム [36] は Lenstra, Lenstra, Lovász による格子の基底縮小を行うアルゴリズムであり、暗号解読などにも利用されているアルゴリズムである [37]。

HB-L³ 法の手順は以下のステップからなる。

- 1) (重み付き) 最小 2 乗法（正規性の仮定のもとでは最尤推定法）により実数解を求める。
- 2) L³ アルゴリズムを適用し、無相関化を行う。
- 3) 整数解の探索範囲を決定し、その中から解を得る。
- 4) 得られた解が真である確率 P_c を計算する。

ステップ 1)~3) は本質的に LAMBDA 法と同様のものであり、ステップ 1) では (6), (7) 式により float 解 \hat{x} , \hat{n} を求める。このとき、 \hat{n} は正規性確率変数となり、

$$\hat{n} \sim \mathcal{N}(n, Q_{\hat{n}}) \quad (32)$$

であるから、

$$\hat{n} = n + u, \quad u \sim \mathcal{N}(0, Q_{\hat{n}}) \quad (33)$$

とすることができる。ここで、上式両辺に左から $G \equiv Q_{\hat{n}}^{-1/2}$ をかけ、 $\tilde{y} \equiv G\hat{n}$, $\tilde{u} \equiv Gu$ と定義すると

$$\tilde{y} = Gn + \tilde{u} \quad \text{ただし} \quad \tilde{u} \sim \mathcal{N}(0, I), \quad (I: \text{単位行列})$$

となり、整数値バイアスの推定問題は

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \arg \min_{n \in \mathbf{Z}^m} \|\tilde{y} - Gn\|^2 \\ &= \arg \min_{n \in \mathbf{Z}^m} (n - \hat{n})^T G^T G (n - \hat{n}) \end{aligned} \quad (34)$$

と表される。

整数値探索と LLL アルゴリズム

HB- L^3 法では, (34) 式において整数解 \tilde{n} を求めるために, 行列 G に LLL アルゴリズムを適用すると, $\bar{G}(\equiv GF)$ の列ベクトルがほぼ直交 (almost orthogonal) となるようなユニモジュラ行列 F (すなわち, F と F^{-1} の要素がすべて整数である行列; 等価的に, F のすべての要素が整数かつ $|\det F|=1$ である行列) を得ることができる. このような行列 F を用いて, $z = F^{-1}n$ なる変換を施すと, (34) 式は

$$\tilde{z} = \underset{z \in \mathbb{Z}^m}{\operatorname{argmin}} (z - \hat{z})^T \bar{G}^T \bar{G} (z - \hat{z}) \quad (35)$$

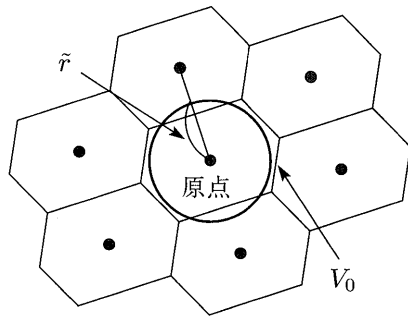
このとき, LAMBDA 法の場合と同様に, (35) 式の重み行列 $\bar{G}^T \bar{G}$ は対角行列に近いものとなり [38], 効果的な探索を行うことが可能となる.

検証問題

\tilde{n} が求められたとき, 得られた解が正しいか否かの判定基準として, \tilde{n} が真値 n である確率 $P_c = \operatorname{Prob}(\tilde{n} = n)$ を考える. P_c は整数値バイアス推定の成功確率とよばれている. (34) 式において, 集合 $\{Gn | n \in \mathbb{Z}^{n_s}\}$ は第 1 図に示すような格子点を生成する [39]. 第 1 図での実線で分割された各領域は, 各格子点に最も近い実数の集合で, voronoi cell とよばれている. したがって P_c は原点を含む voronoi cell を V_0 とすると

$$P_c = \operatorname{Prob}(\bar{u} \in V_0) \quad (36)$$

と表すことができる. P_c の厳密な計算は可能であるが, 実時間計算処理は困難である. そのため, 実時間計算が可能な P_c の上下限が示されている [13]. ここでは P_c の上限 $P_{c,up}$ の結果のみを示す.



第 1 図 P_c の上限 [39]

集合 V_0 の体積は $|\det G|$ で与えられるが, これと体積の等しい原点中心の球に \bar{u} が含まれる確率は P_c の上限となる (第 1 図). このとき P_c の上限 $P_{c,up}$ は

$$P_{c,up} = F_{\chi^2} \left(\left(\frac{|\det G|}{e_{n_s}} \right)^{2/n_s}; n_s \right) \quad (37)$$

で与えられる. ただし, $F_{\chi^2}(\cdot; n_s)$ は自由度 n_s の χ^2 累積分布関数であり, $e_{n_s} = \pi^{n_s/2} / \Gamma(n_s/2 + 1)$ ($\Gamma(t)$ は Gamma 関数) である. また, $P_{c,up}$ は P_c の上限であ

るだけでなく, 数値計算結果により, P_c の値をよく近似することも示されている.

一方, HB- L^3 法での P_c の下限の計算方法に関して, Teunissen は別のアプローチを提案している [40,41]. また, それらの比較が文献 [42] で示されている.

5. おわりに

本稿では, 高精度 GPS/GNSS 測位の鍵となる, 整数値バイアスの推定, 決定手法について解説を行った. いずれの手法においても, 確率的, 統計的手法が利用され, “整数” という拘束付きの最小 2 乗問題を効果的に解くアルゴリズムとなっている. 最後に, 近年では整数値バイアスの推定問題に限らず, GPS/GNSS 測位における種々の処理アルゴリズムについて, そのソースコードが公開されているものも多く ([43] など), 手軽にアルゴリズムの確認が可能なのもあることを紹介しておく.

(2007 年 3 月 2 日受付)

参考文献

- [1] 杉本：GNSS 測位の原理と測位アルゴリズムの基礎；システム/制御/情報, Vol. 51, No. 6, pp. 248–254 (2007)
- [2] 日本測地学会(編)：GPS—人工衛星による精密測位システム (新訂版), 日本測量協会 (1989)
- [3] B. W. Parkinson and J. J. Spilker Jr.(Eds.): *Global Positioning System: Theory and Applications*, Vol. I, II, AIAA (1997)
- [4] A. Leick: *GPS Satellite Surveying*, 3rd edition, John Wiley & Sons (2003)
- [5] E. D. Kaplan(ed.): *Understanding GPS: Principles and Applications*, Artech House (1996)
- [6] P. Misra and P. Enge: *Global Positioning System – Signals, Measurements, and Performance*, Ganga-Jamuna Press (2001)
- [7] 藤原, 杉本：GPS 利用による基線長の推定アルゴリズム；システム制御情報学会論文誌, Vol. 8, No. 1, pp. 17–24 (1995)
- [8] P. J. G. Teunissen: A new method for fast carrier phase ambiguity estimation; *Proc. IEEE Position, Location and Navigation Symp.*, pp. 562–573 (1994)
- [9] E. Frei and G. Beutler: Rapid static positioning based on the fast ambiguity resolution approach “FARA”: Theory and first results; *Manuscripta Geodaetica*, Vol. 15, pp. 325–356 (1990)
- [10] R. Hatch: Instantaneous ambiguity resolution; *Proc. IAG International Symposium 107*, pp. 299–308 (1992)
- [11] C. Park, I. Kim, J. G. Lee and G.-I. Jee: Efficient technique to fix GPS carrier phase integer ambiguity On-The-Fly; *IEE Proc. Radar, Sonar and Navigation*, Vol. 144, No. 3, pp. 148–155 (1997)
- [12] 王盾, 森川, 水町：キネマティック GPS におけるアンビグイティ高速解明法—整数制約条件に基づくアプローチ—；電子情報通信学会論文誌 B-II, Vol. J78-B-II,

- No. 5, pp. 306–316 (1995)
- [13] A. Hassibi and S. Boyd: Integer parameter estimation in linear models with applications to GPS; *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 46, No. 11, pp. 2938–2952 (1999)
- [14] A. H. Mohamed and K. P. Schwarz: A simple and economical algorithm for GPS ambiguity resolution on the fly using a whitening filter; *Navigation: J. Institute of Navigation*, Vol. 45, No. 3, pp. 221–231 (1998)
- [15] C. C. Counselman and S. A. Gourevitch: Miniature interferometer terminals for earth surveying: Ambiguity and multipath with Global Positioning System; *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, Vol. GE-19, No. 4, pp. 244–252 (1981)
- [16] C. Erickson: An analysis of ambiguity resolution techniques for rapid static GPS surveys using single frequency data; *Proc. of ION GPS-92*, pp. 453–462 (1992)
- [17] S. Han and C. Rizos: Comparing GPS ambiguity resolution techniques; *GPS World*, pp. 54–61 (1997)
- [18] R. Hatch and H.-J. Euler: Comparison of several AROF kinematic techniques; *Proc. of ION GPS-94*, pp. 363–370 (1994)
- [19] Y. Gao and X. Shen: A new method for carrier-phase-based precise point positioning; *Navigation: Journal of The Institute of Navigation*, Vol. 49, No. 2, pp. 109–116 (2002)
- [20] S. Sugimoto and Y. Kubo: GNSS regressive models and precise point positioning; *Proc. 36th ISCE International Symposium on Stochastic Systems Theory and its Applications*, pp. 159–164 (2004)
- [21] T. Kashiwayanagi, Y. Koura, H. Suzuki and M. Nakamura: Fast ambiguity resolution by a combined system of multiple-baseline equations; *Proc. of ION GNSS 2006*, pp. 286–291 (2006)
- [22] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger and J. Collins: *Global Positioning System Theory and Practice*, fifth, revised edition, Springer-Verlag (2001)
- [23] Y. Muto, Y. Kubo, C. Uratani and S. Sugimoto: New dynamical models for kinematic GPS positioning; *Proc. of ION GNSS 2004*, pp. 2519–2528 (2004)
- [24] <http://www.aiub.unibe.ch/>
- [25] 測地観測センター (熊木 洋太ほか): 小特集 電子基準点 1,200 点の全国整備について; 国土地理院時報, Vol. 103 (2004)
- [26] 中溝: 信号処理とシステム同定, コロナ社 (1988)
- [27] 磯野: 確率・統計 1, 2, 春秋社 (1984)
- [28] E. Frei and M. Schubert: GPS surveying techniques using the “Fast Ambiguity Resolution Approach (FARA)”; *Proc. 34th Australian Surveyors Congress and the 18th National Surveying Conference* (1992)
- [29] P. J. de Jonge and C. C. J. M. Tiberius: The LAMBDA method for integer ambiguity estimation: Implementation aspects; *No. 12 of LGR-Series*, Delft Geodetic Computing Centre (1996)
- [30] P. J. G. Teunissen and A. Kleusberg(Eds.): *GPS for Geodesy*, 2nd edition, Springer-Verlag (1998)
- [31] D. B. Cox, Jr. and J. D. W. Brading: Integration of LAMBDA ambiguity resolution with Kalman filter for relative navigation of spacecraft; *Navigation: J. Institute of Navigation*, Vol. 47, No. 3, pp. 205–210 (2000)
- [32] G. H. Golub and C. F. V. Loan: *Matrix Computations*, Second Edition, Johns Hopkins University Press (1989)
- [33] <http://www.tudelft.nl/>
- [34] G. Strang and K. Borre: *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*, Wellesley-Cambridge Press (1997)
- [35] <http://kom.aau.dk/~borre/matlab/proc.dd/>
- [36] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr. and L. Lovász: Factoring polynomials with rational coefficients; *Math. Ann.*, No. 261, pp. 515–534 (1982)
- [37] N. Koblitz (著), 桜井 (訳): 数論アルゴリズムと楕円暗号理論, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1997)
- [38] Y. Kubo, R. Hata and S. Sugimoto: Comparative studies of three decorrelating algorithms in ambiguity resolution for phase-only and code-guided cases; *Proc. of ION GPS 2001*, pp. 3060–3066 (2001)
- [39] 杉本, 久保, 熊谷: GPS 測位アルゴリズムと推定・検定理論; システム/制御/情報, Vol. 46, No. 5, pp. 276–285 (2002)
- [40] P. J. G. Teunissen: An optimality property of the integer least-squares estimator; *Journal of Geodesy*, Vol. 73, No. 11, pp. 587–593 (1999)
- [41] P. Joosten and C. Tiberius: Fixing the ambiguities—Are you sure they’re right?; *GPS World*, Vol. 11, No. 5, pp. 46–51 (2000)
- [42] H. F. Thomsen: Evaluation of upper and lower bounds on the success probability; *Proc. of ION GPS 2000*, pp. 183–188 (2000)
- [43] U.S. NGS/NOAA(National Geodetic Survey, National Oceanic and Atmospheric Administration): <http://www.ngs.noaa.gov/gps-toolbox/index.html>

著者略歴

久保 幸弘 (正会員)



1974年10月13日生。2002年3月立命館大学大学院理工学研究科博士後期課程修了。同年4月三菱電機(株)入社。カーナビゲーションシステムのハードウェア設計等を担当し、2004年4月より立命館大学理工学部電気電子工学科講師、2007年4月同准教授。主としてGPSに関する信号処理およびその応用に関する研究に従事。博士(工学)。IEEE, ION, 電子情報通信学会の会員。