# 新型ウィルス感染症とベイズ推論

一色浩(制数理解析研究所協力 浅里幸起(SPAC)

2020.05.16(土)、第2回SAPTオンラインサロン

# 1. はじめに

2019年末に中国湖北省武漢で始まった新型コロナウィルスは、 半年余りの内にパンデミア(COVID-19)となった。2020年5月は じめの時点で、世界の全感染者355万人、死者25万人に達し たが終息からは程遠い。

PCR検査の感度が低いために、その実施法を巡ってさまざまな議論が飛び交っている。そのレベルは必ずしも高いとは言えない。思い込みを捨てて学術に基づいた議論が望まれる。

我々の議論の目的は、政府や専門家を批判するものではなくて、建設的なコメントを行って、国難を共に解決すべく側面から支援することである。

最近はAIというと、ニューラル・ネットワークを指すことが多い。 しかし、ニューラル・ネットワークには二つの大きな問題がある。

すなわち、過学習とブラックボックス推論である。ベイズ推論には、このような問題がないので、最近注目が集まっている。

最近、古寺雅晴氏(日立造船OB)からコロナ感染者の感染力について、極めて興味ある情報を頂いた。

台湾の発症者を徹底調査した結果、コロナは発症4日前から感染し、発症の6日以降に感染した例が0であったので、コロナ感染は発症前から発症5日に限定されるとのこと。

日本でPCR検査受診を発熱が4日以上続いた場合に限定し、その後陽性者を隔離したのでは、感染防止にほとんど意味がなかったことになる。

最近、鈴木基光氏(日立造船OB)から、貴重なご意見を頂いた。

- 1. 大阪モデルの陽性率7%未満の根拠不明。
- 2. 日本政府のコロナ押さえ込みが万全でない。 感染率 β ばかりでなく、隠れ感染者数 / も減らすべき。
- 3. 感染症対策の原点である隔離を重視すべき。

最近、梶原宏之氏(九大名誉教授)、古寺雅晴氏(日立造船OB)、 浅田忠敬氏(日立造船OB)から、貴重なご意見を頂いた。

九大小田垣名誉教授の「隠れ感染者数 / を隔離すべき」という考え方に注目すべき。

# おさらい

確率密度関数: 
$$p(x) \ge 0$$
,  $\int p(x)dx = 1$ 

同時分布: p(x, y)

周辺分布: 
$$p(y) = \int p(x, y) dx$$

条件付き分布: 
$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)}$$

ベイズの定理: 
$$p(y|x) = \frac{p(x|y)p(y)}{p(x)}$$

独立性: 
$$p(x, y) = p(x)p(y)$$
 or  $p(x|y) = p(x)$ 

「確率論に基づいたベイズ推論による学習法」は、「ディープラーニングとは異なる学習法」である。

ベイズ推論による学習とは、データをX、未知変数をΘとして、同時分布p(X,Θ)のモデルを作り、ベイズの定理

$$p(\mathbf{\Theta} \mid \mathbf{X}) = \frac{p(\mathbf{X}, \mathbf{\Theta})}{p(\mathbf{X})} = \frac{p(\mathbf{X} \mid \mathbf{\Theta})p(\mathbf{\Theta})}{p(\mathbf{X})}$$

を用いて事後確率 p(Θ|X)を求めることである。

ベイズ学習は数理的に難しいが、ブラックボックスではない。また過学習や過剰適合を起こさない。

# ベイズ推論の参考文献

小島寛之、ベイズ統計学入門、ダイヤモンド社(2015)

松原 望、入門ベイズ統計、東京図書(2008)

須山敦志、ベイズ推論による機械学習入門、講談社機械学習スタート アップシリーズ(2017)

## ニューロ学習の問題点

ブラックボックス:推論の根拠が不明

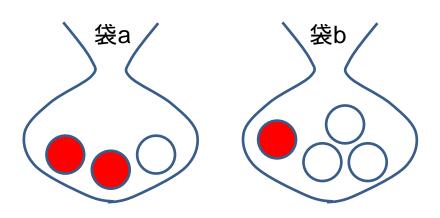
過学習:学習し過ぎると学習データに可適合して 汎用性を失う

ベイズ推論では過学習がない上に、データ量を増 やすと精度向上が保証される。

# ベイズ推論とは

同時分布から興味の対象となる条件付き分布や 周辺分布を算出すること。

# 赤玉、白玉問題:目をつぶって玉を選ぶ



赤玉と白玉の入った二つの袋

$$p(x=a) = p(x=b) = 1/2$$

$$p(y = r \mid x = a) = 2/3$$

$$p(y = w \mid x = a) = 1/3$$

$$p(y = r \mid x = b) = 1/4$$

$$p(y = w \mid x = b) = 3/4$$

### 同時分布の例

# 選ばれた袋がaで、かつ赤玉の出る確率:

$$p(x = a, y = r) = p(x = a)p(y = r \mid x = a) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

# 選ばれた袋がbで、かつ赤玉の出る確率:

$$p(x = b, y = r) = p(x = b)p(y = r \mid x = b) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

## 周辺分布の例

選ばれた袋にかかわらず、取り出された玉が赤玉である確率:

$$p(y=r) = \sum_{x} p(x, y=r)$$
  
=  $p(x=a, y=r) + p(x=b, y=r) = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$ 

### ベイズの定理の例

取り出された玉が赤であることが分かった場合、選ばれた袋がaである確率は?

$$p(x=a \mid y=r) = \frac{p(y=r \mid x=a)p(x=a)}{p(y=r)} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} / \frac{11}{24} = \frac{8}{11}$$

## ベイズ推論によるパラメーターの推定

赤玉と白玉が複数個入った一つの袋がある。玉の 比率  $\theta$  は未知とする。袋から玉を取り出して色を 確認し、また袋に戻すという試行を N 回行い、そ の結果から赤玉の比率  $\theta$  を推定できないか?

観測データを $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ とすると、同時分布は

$$p(\mathbf{Y}, \theta) = p(\mathbf{Y} \mid \theta) p(\theta) = \left\{ \prod_{n=1}^{N} p(y_n \mid \theta) \right\} p(\theta)$$

今の目的は θ の値をデータ Y を観測することにより推定することである。この問題は下記の条件付き確率を計算する問題に帰着できる。

$$p(\theta \mid \mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\mathbf{Y})} \propto p(\mathbf{Y} \mid \theta)p(\theta)$$

$$Y: \vec{r} - \varphi, \theta: \mathcal{N} \ni \lambda - \varphi$$

$$p(\theta)$$
: 事前確率

$$p(\theta \mid \mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y}, \theta)}{p(\mathbf{Y})} = \frac{p(\mathbf{Y} \mid \theta)p(\theta)}{p(\mathbf{Y})}$$

$$p(\mathbf{Y}|\theta)$$
:尤度関数

 $p(\theta | \mathbf{Y})$ : 事後確率

# 推論 or 学習の方法

- 0. 誤差最小:ニューラルネットなど広く用いられる。
- 1. 尤度最大:  $p(\mathbf{Y}|\theta)$  を最大にする $\theta$ を求める。
- 2. ベイズ推論:
  - (1)確率モデルの構築: データYと未知変数 $\theta$ の同時分布 $p(Y,\theta)$ を構築。
  - (2)推論の導出: 事後分布 $p(\theta|\mathbf{Y})$ を解析的、数値的に求める。

# ベイズ学習の利点と欠点

利点:最小あるいは最大を利用するフィッティングではないので、過学習や過剰適合を起こさない。

### 欠点:

- (1)数理的な知識を要する: 現象を確率モデルとして表現しないといけない。 さらに、構築したモデルについて、解析的あるい は数値的なアルゴリズムを導かねばならない。
- (2) 計算コストが掛かる: 興味の対象となるモデルは複雑なことが多く、ほとんどの場合、解析的な事後分布が得られない。 近年、近似計算法が発達してきたので、確率推 論に基づかない他の機械学習より遅いことはほ とんどない。

# 2. PCR検査とベイズ推定

事前確率:人口100,000,000人の2,000人がコロナに感染 P(Corona)=2,000/100,000,000=0.00002 P(Ncorona)=99,998,000/100,000,000=0.99998

#### 表1 PCR検査の信頼度

	コロナ感染者	非コロナ感染者
テスト結果が陽性	P(Positive Corona) = <mark>0.7</mark> 感度	P(Positive NCorona) =0.1
テスト結果が陰性	P(Negative Corona) =0.3	P(Negative NCorona) =0.9 特異度

感度は低すぎて絞込みを掛けなければ、スクリーニングに使えないであろう。特異度は非コロナであることの確定に使えよう。

感度を0.4、特異度を0.99とする説もある。

事前確率とPCR検査の信頼度からテスト結果(陽性/陰性)と感染(感染/非感染)の同時確率を求めると、表2のようになる。

表2 PCR検査の同時確率(テスト結果×感染)

	コロナ感染者	非コロナ感染者	行の和
テスト結果が陽性	P(Corona,Positive)	P(NCorona,Positive)	P(Positive)
	=0.7 × 0.00002	=0.1 × 0.99998	=0.000014+0.299994
	=0.000014	=0.099998	= 0.100012
テスト結果が陰性	P(Corona, Negative)	P(NCorona, Negative)	P(Negative)
	=0.3 × 0.00002	=0.9 × 0.99998	=0.000006+0.899982
	=0.000006	=0.899982	=0.899988

P(Corona, Positive) = P(Positive | Corona) P(Corona)

ベイズ定理を適用して、条件付き確率を求めると、表3のようになる。陽性の人が非コロナ感染者である確率 P(NCorona | Positive)は0.999860であるから、陽性の人のほぼ全員が非コロナ感染者、すなわち偽陽性になる。新型コロナ感染症は指定感染症であるから、陽性者は全員隔離される。多数の偽陽性は、医療崩壊につながる。これは大問題である。

表3 PCR検査の条件付き確率(感染 | テスト結果)

	コロナ感染者	非コロナ感染者
テスト結果が陽性	P(Corona   Positive) =0.000014/0.100012 =0.000140	P(NCorona Positive) =0.099998/0.100012 =0.999860 偽陽性
テスト結果が陰性	P(Corona Nagative) =0.000006/0.899988 =0.000007 偽陰性	P(NCorona   Nagative) =0.899982/0.899988 =0.999993

#### 事前確率を種々変えた結果を表4に示す。

表4 事前確率を種々変えた結果

先験	確率	PCR検査が陽性 PC		PCR検査	検査が陰性	
感染者 P(Corona)	非感染者 P(NCorona)	感染者 P(Corona  Positive)	非感染者 P(NCorona  Positive)	感染者 P(Corona  Negative)	非感染者 P(NCorona  Negative)	
0.00001	0.99999	0.000023	0.999977	0.000001	0.999999	
0.0001	0.0009	0.000233	0.999767	0.000011	0.999989	
0.001	0.009	0.002330	0.997670	0.000111	0.999889	
0.01	0.09	0.023026	0.976974	0.001121	0.998879	
0.1	0.9	0.205882	0.794118	0.012195	0.987805	

仮に10,000人を対象にする。事前確率をコロナ感染者の確率 *P(Corona)*=0.001、非コロナ感染者の確率*P(NCorona)*=0.999とすると、同時確率は表5のような結果になる。この結果から偽陽性997人になり、正しく医療崩壊の原因になってしまう。一方、擬陰性3人が見逃されてしまい、感染拡大につながってしまう。

表5 コロナ感染/非感染とPCR検査結果

	コロナ感染者	非コロナ感染者	行の和
テスト結果が 陽性	P(Corona,Positive) =0.7 × 0.001 =0.00077人	P(NCorona,Positive) =0.1×0.999 =0.0999999人	<i>P(Positive)</i> =0.0007+0.0999 = 0.10061,006
テスト結果が 陰性	P(Corona,Negative) =0.3 × 0.001 =0.00033人	P(NCorona,Negative) =0.9×0.999 =0.89919,990人	P(Negative) =0.0003+0.8991 =0.89948,994人
列の和	P(Corona) =0.0007+0.0003 =0.00110人	P(NCorona) =0.0997+0.8991 =0.9999,990人	1.010,000人

# 3. PCR検査と絞込み

検査精度が低い場合には、検査対象を絞り込まないといけない。例えば、単に高熱を出したと言うだけではなくて、2日続けてとか、3日続けて発熱した者を検査の対象にすると、効果的な絞込みが可能になる。

ベイズ推論では、1日高熱が出た時のベイズ推論結果を、 2日高熱が出た場合の事前確率とすることができる。

同様に、2日高熱が出た時のベイズ推論結果を、3日高熱が出た場合の事前確率とすることができる。

準備: 事前確率: 人口100,000,000人の2,000人がコロナに感染 P(Corona)=2,000/100,000,000=0.00002 P(Ncorona)=99,998,000/100,000,000=0.99998

高熱が出た人のデータとして、コロナ感染者の中で高熱が出た人の条件付き確率と非コロナ感染者の中で高熱が出た人の条件付き確率 P(HTmp|NCorona)を

P(HTmp | Corona) = 0.2, P(HTmp | NCorona) = 0.01

## 高熱が出たら新型コロナウィルス感染者か?

コロナ感染者でかつ高熱が出た人の同時確率P(Corona, HTmp)と非コロナ感染者でかつ高熱が出た人の同時確率P(NCorona, HTmp)は

$$P(Corona, HTmp) = P(HTmp | Corona)P(Corona)$$
  
= 0.2×0.00002 = 0.000004  
 $P(NCorona, HTmp) = P(HTmp | NCorona)P(NCorona)$   
= 0.01×0.99998 = 0.0099998

高熱が出た人がコロナ感染者である条件付き確率P(HTmp|Corona)と高熱が出た人が非コロナ感染者である条件付き確率P(HTmp|Ncorona)は

$$P(Corona \mid HTmp) = \frac{P(Corona, HTmp)}{P(Corona, HTmp) + P(NCorona, HTmp)}$$

$$= \frac{0.000004}{0.000004 + 0.0099998} = 0.0003998,$$

$$P(NCorona \mid HTmp) = \frac{P(NCorona, HTmp)}{P(Corona, HTmp) + P(NCorona, HTmp)}$$

$$= \frac{0.0099998}{0.0099998} = 0.9996002$$

## 2日高熱が出たら新型コロナウィルス感染者か?

コロナ感染者でかつ二日続けて高熱が出た人の同時確率 P(Corona, 2HTmp)と非コロナ感染者でかつ二日続けて高熱が出た人の同時確率P(Ncorona, 2HTmp)は…付録参照

$$P(Corona, 2HTmp) \sim P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid HTmp)$$

$$= 0.2 \times 0.0003998 = 0.00007996$$

$$P(NCorona, 2HTmp) \sim P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid HTmp)$$

$$= 0.01 \times 0.9996002 = 0.009996002$$

#### したがって

$$P(Corona \mid 2HTmp) = \frac{P(Corona, 2HTmp)}{P(Corona, 2HTmp) + P(NCorona, 2HTmp)}$$

$$=\frac{0.00007996}{0.00007996+0.009996002}=0.007691566,$$

$$P(NCorona \mid 2HTmp) = \frac{P(NCorona, 2HTmp)}{P(Corona, 2HTmp) + P(NCorona, 2HTmp)}$$

$$= \frac{0.009996002}{0.00007996 + 0.009996002} = 0.961542168$$

P(Corona | 2HTmp)は0.00769と、P(Corona | HTmp)のほぼ20倍になった。

# 3日高熱が出たら新型コロナウィルス感染者か?

コロナ感染者でかつ3日続けて高熱が出た人の同時確率 P(Corona, 3HTmp)と非コロナ感染者でかつ二日続けて高熱が出た人の同時確率P(Ncorona, 3HTmp)は、同様にして

$$P(Corona, 3HTmp) \sim P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid 2HTmp)$$

$$= 0.2 \times 0.007691566 = 0.001538313$$

$$P(NCorona, 3HTmp) \sim P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid 2HTmp)$$

$$= 0.01 \times 0.961542168 = 0.00961542168$$

したがって

$$P(Corona \mid 3HTmp) = \frac{P(Corona, 3HTmp)}{P(Corona, 3HTmp) + P(NCorona, 3HTmp)}$$

$$= \frac{0.001538313}{0.001538313 + 0.00961542168} = 0.137919104,$$

$$P(NCorona \mid 3HTmp) = \frac{P(NCorona, 3HTmp)}{P(Corona, HTmp) + P(NCorona, HTmp)}$$

$$= \frac{0.00961542168}{0.001538313 + 0.00961542168} = 0.862080895$$

P(Corona | 3HTmp)は0.138と、P(Corona | 2HTmp)のほぼ18倍になった。

# 4日高熱が出たら新型コロナウィルス感染者か?

コロナ感染者でかつ4日続けて高熱が出た人の同時確率 P(Corona, 4HTmp)と非コロナ感染者でかつ二日続けて高熱が出た人の同時確率P(Ncorona, 4HTmp)は、同様にして

$$P(Corona, 4HTmp) \sim P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid 3HTmp)$$

$$= 0.2 \times 0.137919104 = 0.02758382$$

$$P(NCorona, 4HTmp) \sim P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid 3HTmp)$$

$$= 0.01 \times 0.862080895 = 0.00862080895$$

したがって

$$P(Corona \mid 4HTmp) = \frac{P(Corona, 4HTmp)}{P(Corona, 4HTmp) + P(NCorona, 4HTmp)}$$

$$= \frac{0.02758382}{0.02758382 + 0.00862080895} = 0.761884743,$$

$$P(NCorona \mid 4HTmp) = \frac{P(NCorona, 4HTmp)}{P(Corona, 4HTmp) + P(NCorona, 4HTmp)}$$

$$= \frac{0.00862080895}{0.02758382 + 0.00862080895} = 0.238112853$$

P(Corona | 4HTmp)は0.762と、P(Corona | 3HTmp)のほぼ5.5倍になった。

### 東京都の2020年5月10日時点での現状

人口: 13,953,577人(2020年2月1日)

累積感染者:4,868人

隠れ累積感染者推定: 48,680人

隠れ感染者を含むコロナ感染者: P(Corona)=0.00384... 53,548人

非コロナ感染者: P(NCorona)=1-0.99616...13,900,000人

P(Corona, Positive)=0.7 × 0.00384=0.00269...37,660人 真陽性

P(NCorona, Positive)=0.3 × 0.99616=0.298848...4,184,000人 偽陽性

P(Corona, Negative)=0.1×0.00384=0.000384...5,376人 擬陰性

P(NCorona, Negative)=0.9×0.99616=0.896544...12,552,000人 真陰性

#### 1回高熱絞込み

 $P(Corona, HTmp) = 0.2 \times 0.00384 = 0.000768$ 

 $P(Ncorona, HTmp) = 0.01 \times 0.99616 = 0.0099616$ 

P(Corona|HTmp)=0.000768/(0.000768+0.0099616)=0.07158

P(Ncorona | HTmp)=0.0099616/(0.000768+ 0.0099616)=0.92842

#### 2回高熱絞込み

 $P(Corona, 2HTmp) \sim 0.2 \times 0.07158 = 0.014316$   $P(Ncorona, 2HTmp) \sim 0.01 \times 0.92842 = 0.0092842$   $P(Corona \mid 2HTmp) = 0.014316 / (0.014316 + 0.0092842) = 0.6066$  $P(Ncorona \mid 2HTmp) = 0.0092842 / (0.014316 + 0.0092842) = 0.3934$ 

#### 3回高熱絞込み

 $P(Corona, 3HTmp) \sim 0.2 \times 0.6066 = 0.12132$   $P(Ncorona, 3HTmp) \sim 0.01 \times 0.3934 = 0.00393$   $P(Corona \mid 3HTmp) = 0.12132/(0.12132 + 0.00393) = 0.9686$  $P(Ncorona \mid 3HTmp) = 0.00393/(0.12132 + 0.00393) = 0.0314$ 

#### 絞込みの効果

	1回絞込み	2回絞込み	3回絞込み
P(Corona —)	0.072	0.607	0.969
P(NCorona —)	0.928	0.393	0.031

#### 2回高熱以上の絞込みを掛ければ、スクリーニングに使える33

# 絞り込むことの矛盾と対策

絞り込むことに矛盾があることを指摘したい。

発熱その他の症状で絞り込むということは、発症者をあぶりだすことを意味し、発症しない感染者を見逃してしまう。

しかも発症しない感染者が感染者全体の80%近くいるということと、発症しない感染者も未感染者を感染するということである。

発症者をほぼ全てあぶり出せれば、その背景にいる未発症者数を推定できるが、特定はできない。

未発症者は2週間後には治癒するので、感染力を失うが、 現未発症者(隠れコロナ)をあぶり出す方法は、クラスター 追跡しかないのであろうか?もしもそうならば、携帯電話を 利用する方法を積極的に導入せざるを得ない。

# 4. 最後に

PCR検査の感度が低いために、その実施法を巡ってさまざまな議論がなされている。そのレベルは必ずしも高いとは言えない。思い込みや固定観念によるものが多いが、学術に基づいた議論を行い、合理的な結論を導かねばならない。

寺田寅彦の言葉に「ものをこわがらな過ぎたり、こわがり過ぎたりするのはやさしいが、正当にこわがることはなかなかむつかしいことだ」というものがある。

PCR検査は判断の材料を与えるものであるが、そのやり方と 結果の判断を誤ると、医療崩壊や感染の急拡大を招きかね ない。

判断を誤まらないためには、PCR検査のなんたるかを学術的に正しく理解することが欠かせない。本論がその助けとなれば幸いである。

PCR検査の絞り込むことの矛盾と対策についても考察した。25

# 付録

```
コロナ感染者が2日続けて発熱は
  P(Corona, 2HTmp) = P(HTmp \mid Corona)P(HTmp, Corona)
    = P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid HTmp)P(HTmp)
非コロナ感染者が2日続けて発熱は、同様に考えて
  P(NCorona, 2HTmp) = P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid HTmp)P(HTmp)
正規化すると
P(Corona \mid 2HTmp) = P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid HTmp).
 \cdot [P(HTmp \mid Corona)P(Corona \mid HTmp) + P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid HTmp)]^{-1}
P(NCorona \mid 2HTmp) = P(HTmp \mid NCorona)P(NCorona \mid HTmp).
  \cdot \left[ P(HTmp \mid Corona) P(Corona \mid HTmp) + P(HTmp \mid NCorona) P(NCorona \mid HTmp) \right]^{-1}
2回目のベイズ推定において、事前確率 P(Corona)とP(NCorona) を、
1回目のベイズ推定の結果 P(Corona | HTmp) と P(NCorona | HTmp)
```