

GPS測位のしくみ

西修二郎



1.GPS測位で使われる座標系



1-1 地球座標系



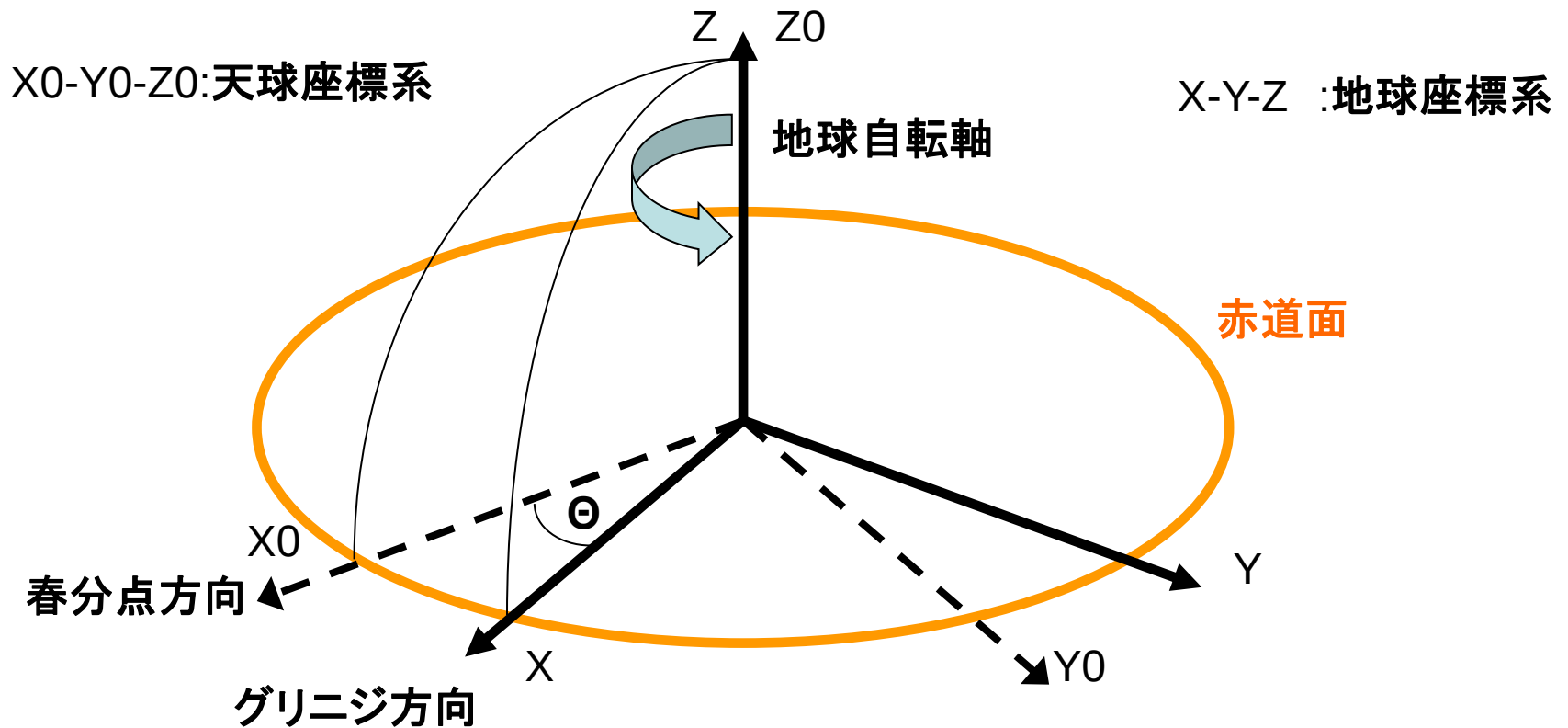
Shujiro NISHI

地球座標系とは？

- 地球上での位置を表すための座標系。
- 地球に固定された座標系。
- 昔は、国毎に異なる座標系を使用。
- 現在は地球重心に原点を持つ共通の座標系に変わりつつある。
- 日本は2001年、地球重心に原点を持つ地球座標系であるITRFを採用

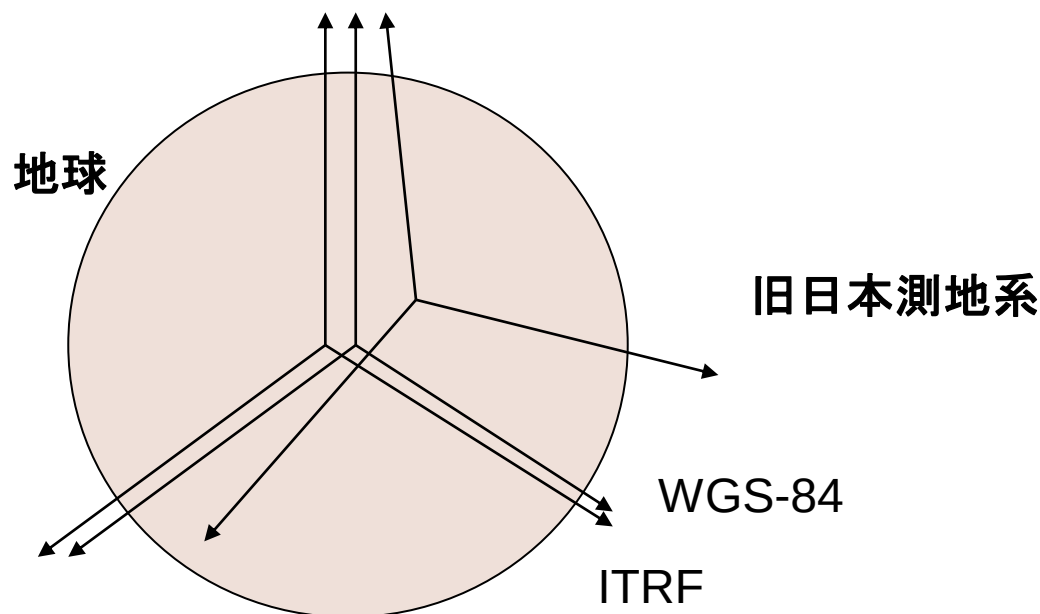
地球座標系

地球座標系



様々な地球座標系

地球重心位置や自転軸方向の決め方の違いにより様々な地球座標系が存在する。



測地基準系とは？

- 基準となる座標系（国やシステムの）。
- 測地基準系は2つの要素から成り立つ。
測地基準系＝地球座標系＋準拠楕円体
- 日本の測地基準系＝ITRF94+GRS80
地球座標系：ITRF94
準拠楕円体：GRS80

日本の測地基準系

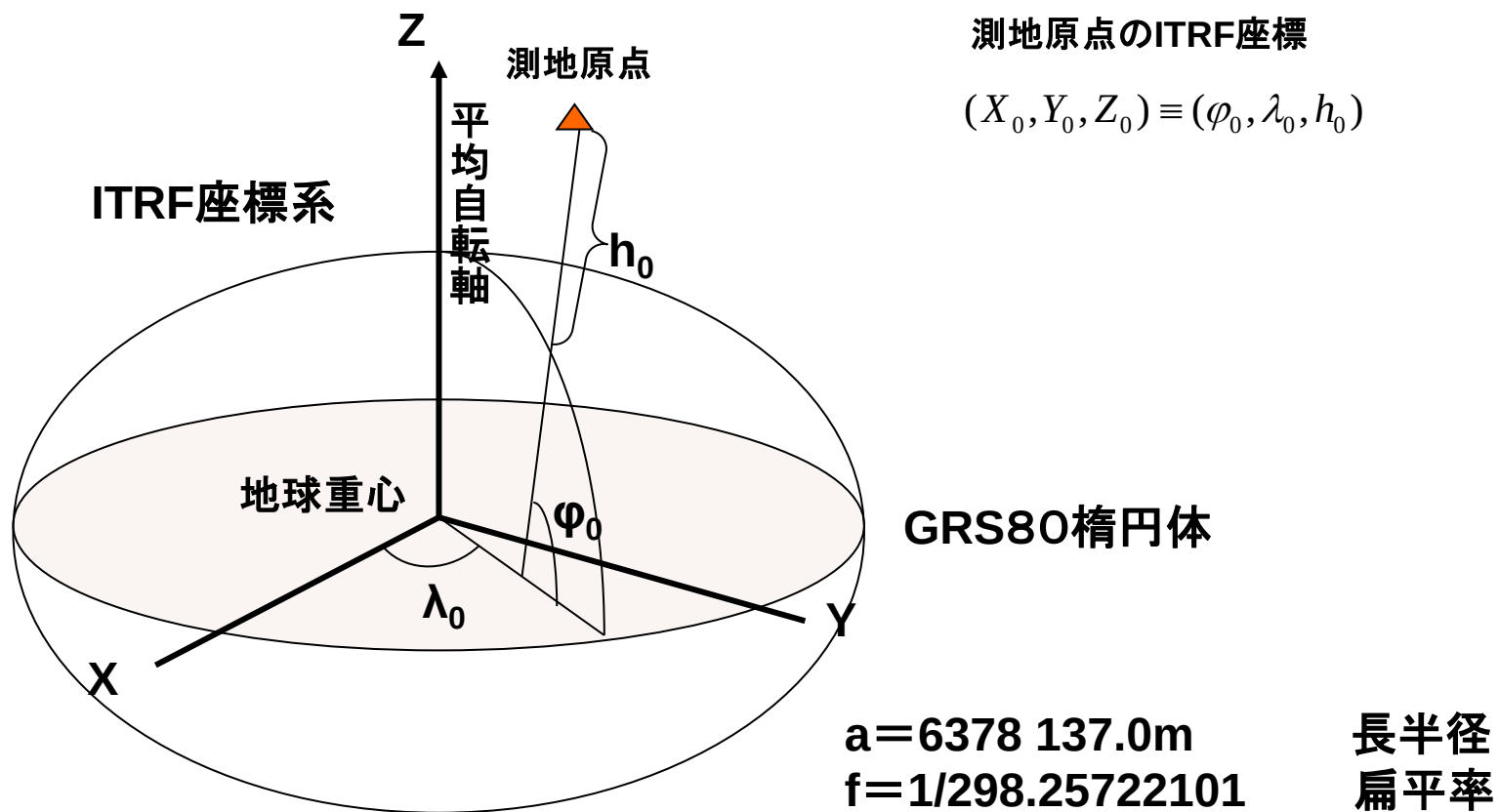
地球座標系：**ITRF94**

国際地球回転事業(IERS)によって決定された地球重心座標系。

準拠楕円体：**GRS80**

国際測地学協会により採択された最新の地球楕円体

(地球楕円体は、地球上の位置を経度、緯度で表現するために使われる楕円体で、19世紀以降、地球の形に最も近い楕円体が追い求められてきた。)



日本の測地基準系

測地基準系

測地座標系 + 準拠楕円体
ITRF94 GRS80

幾何学的位置: X, Y, Z

緯度、経度、楕円体高: φ, λ, h

高さの基準については、注意が必要。

鉛直線 + ジオイド面
(東京湾平均海面)

日本の高さは、 H (正標高)で表す。

日本の位置の基準

GPSで使われる地球座標系

WGS84座標系

この座標系は、元々TRANSIT観測に由来する1500点の地上点の座標値で実現された座標系である。1987年からこの座標系はGPSのために使われている。1994年の2月にITRFに合うよう更新されたWGS-84は、WGS-84(G730)と表示されている。1996年に再度WGS-84(G873)と表示される座標系への更新が行われた。ここで730と873は更新の行われたGPSの週番号を示している。

GPSで使われる準拠楕円体

WGS84準拠楕円体

- $a=6378\ 137.0\text{m}$ 楕円体の長半径
- $f=1/298.257223\ 563$ 楕円体の扁平率
- $\omega=7\ 292\ 115 \cdot 10^{-11}\text{rads}^{-1}$ 地球の自転角速度
- $\mu=3\ 986\ 004.418 \cdot 10^8\text{m}^3\text{s}^{-2}$ 地球の重力定数

GPSの座標系と日本測地座標系

- 日本の測地座標系は平成14年4月から地球重心に中心をもつ新しい座標系に切り替わった。この座標系は**ITRF94**と呼ばれている地球基準座標系である。また同時に座標系に付属する準拠楕円体も明治以来の**ベッセル楕円体**から**GRS80楕円体**に変更された。
- GPSの準拠する座標系は、米国国防総省の決定した**WGS84**という座標系である。
- 両座標系とも地球の重心に座標中心を持つ**地心座標系**であり、その違いは公共測量レベルでは無視できる。
- GPSの場合の準拠楕円体**WGS84**と、日本測地系の場合の準拠楕円体**GRS80**は異なっているが、座標系と同じくその差は僅かであり、公共測量レベルでは同一と見なして差し支えない。

位置の表現

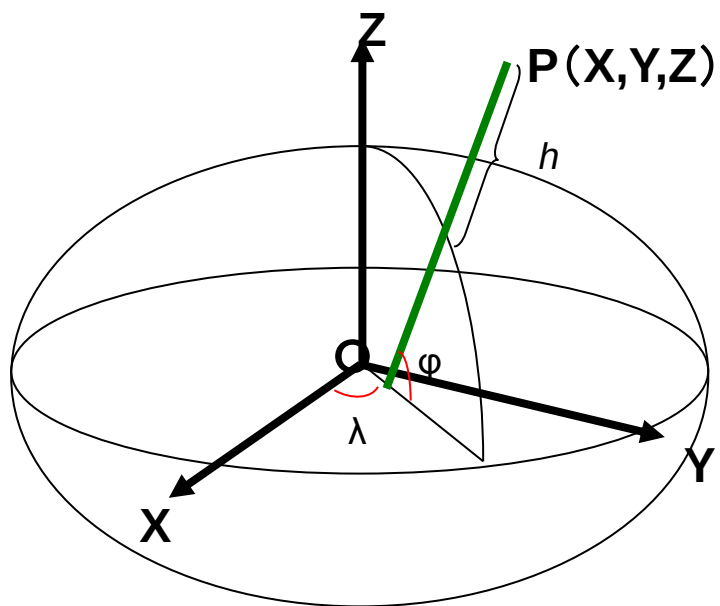
地球上の位置を表すには、次の3通りの表現が一般的。

- 1) 三次元直交座標 (x, y, z)
- 2) 測地経緯度、高さ (φ, λ, h)
- 3) 平面直角座標 (X, Y)

これらは、座標変換式で相互に変換される。

直交座標と楕円体座標

	X		φ	
直交座標	Y	$\longleftrightarrow$	λ	楕円体座標
	Z		h	



直交座標と楕円体座標の変換

直交座標と楕円体座標との関係は、

$$X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi$$

ここで

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

a, b

卯酉線曲率半径
楕円体の長、短半径

直交座標と楕円体座標の変換

逆変換式 $\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$$

$$h = \frac{p}{\cos \varphi} - N$$

ここで $\theta = \arctan \frac{Za}{pb}$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

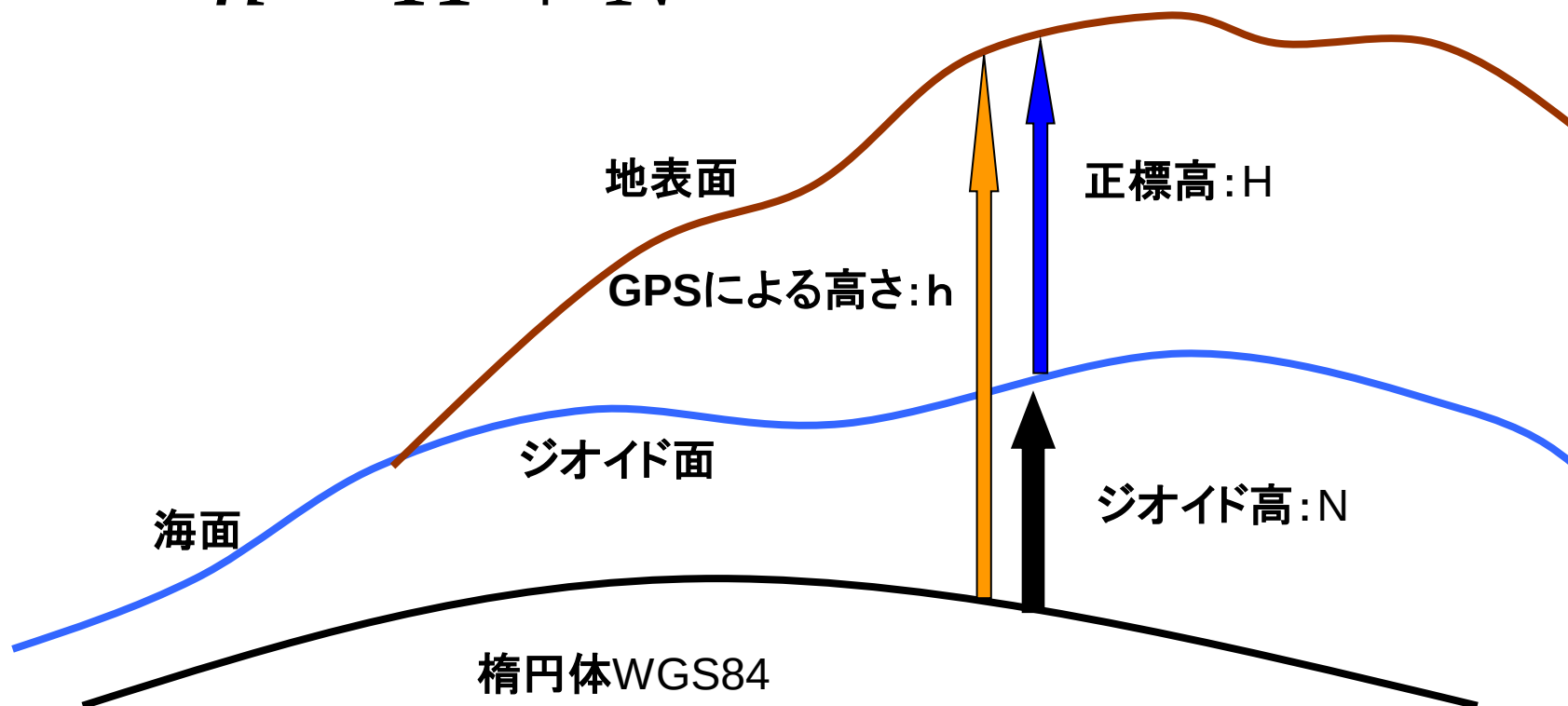
補助量

第2種の離心率

GPS測量による標高決定

- GPSで求まる高さは、GPSが準拠するWGS84橢円体からの幾何学的な高さである。
- 日本で用いられている標高は、平均海水面（ジオイド）からの高さである。
- このためGPS測量で標高を求めるためには、橢円体とジオイドとの関係（ジオイド高）が必要になる。
- 日本のジオイド高は、国土地理院の「日本のジオイド2000」から得られるのでこれを使えばGPS測量の橢円体高を標高に変換できる。

$$h = H + N$$



高さの変換

高さの式 $h = H + N$

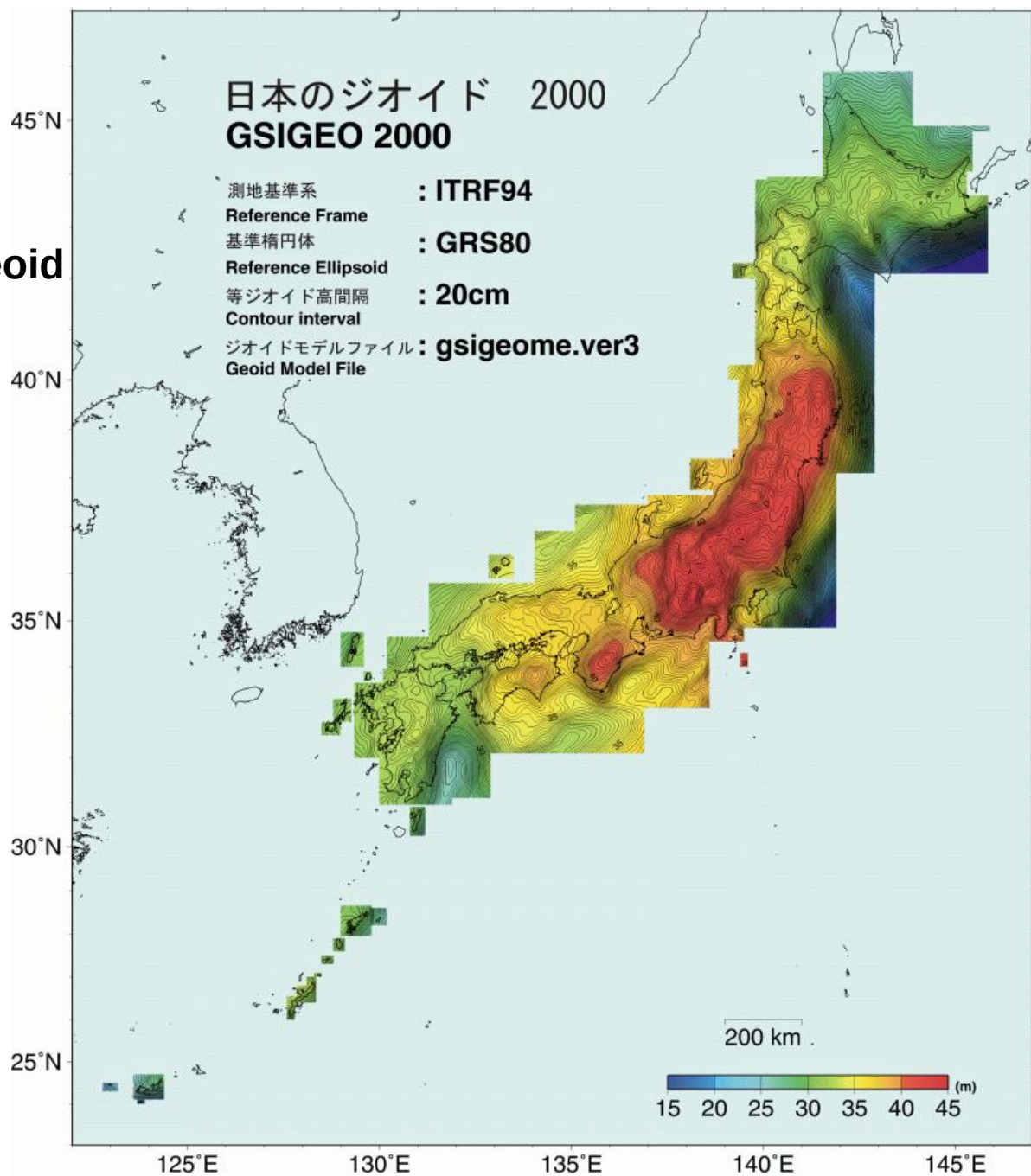
は、橢円体とジオイドの関係を表している。
ここで

h	… 橢円体高
H	… 正標高
N	… ジオイド高

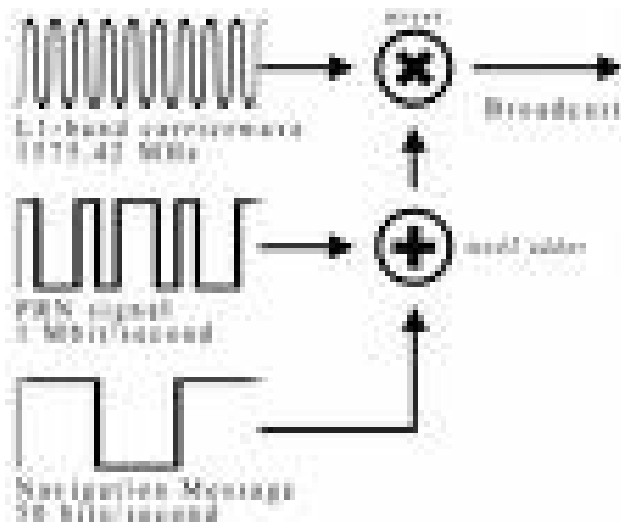
である。

国土地理院のジオイドHP

<http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/geoid>



2. GPS衛星からの信号

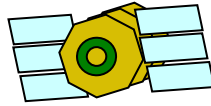


Shujiro NISHI

衛星信号

- L1, L2 電離層補正のため2周波数を用いる。
- C/Aコード 一般用測位信号(L1のみ)
- Pコード 軍用秘密測位信号 → Yコード
一般の利用不能
- 航法メッセージ(主要なものは2時間ごとに更新)
 - 衛星の軌道パラメーター
 - 衛星時計の補正係数
 - 衛星の動作状態の情報(ヘルス)
 - 電離層補正係数
 - 全衛星システムShinjiro Nishiの軌道情報

GPS衛星信号



搬送波

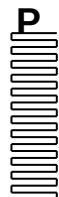
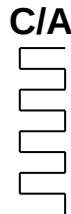
L1



L2



コード



M



M

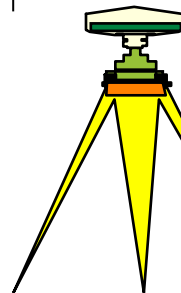
搬送波L1 = 1575.42MHz 19.0 cm

搬送波L2 = 1227.60MHz 24.4 cm

Pコード = 10.23MHz 29.3 m

C/Aコード = 1.023MHz 293 m

M航法メッセージ = $50 \cdot 10^{-6}$ MHz



Shujiro NISHI

衛星信号 (コード)

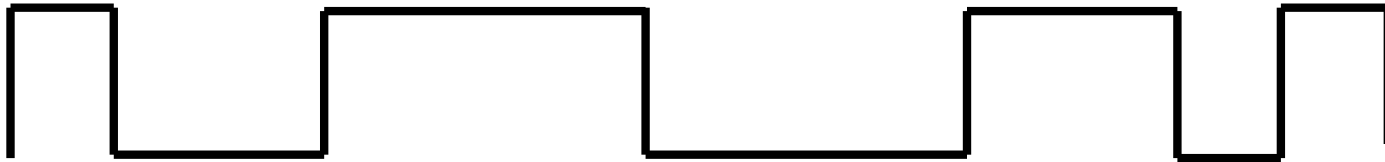
擬似ランダム雑音符号(PRNコード)の特徴

パラメータ	C/Aコード	Pコード
チップレート	$1.023 \cdot 10^6$ bps	$1023 \cdot 10^6$ bps
チップ長	300m	30m
繰り返し時間	1ミリ秒	1週間
コードタイプ	37個の独自 コード	37個の分割された コード
特性	取得が容易	高精度

衛星信号 (コード)

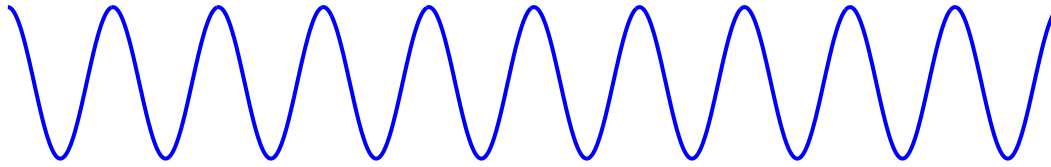
C/A, P コード

- PRN (pseudo random noise) 擬似雑音符号

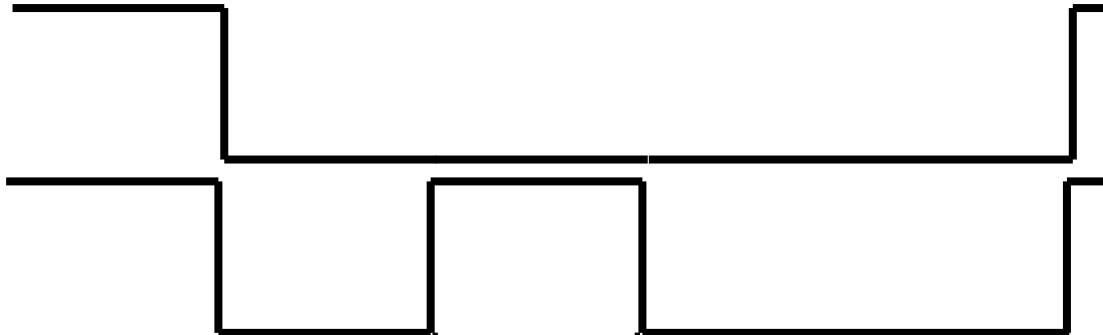


衛星ごとに違うパターンを付与

同一周波数で送信しても、
コードで衛星を識別する。

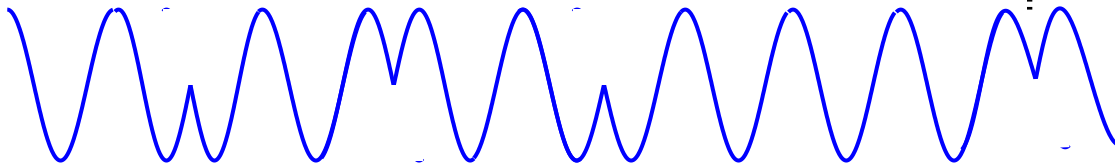


搬送波



衛星情報(航法メッセージ)

コード



変調波

二位相変調

: 衛星情報、コードが変化する度に、搬送波の位相が 180° 変化する。

衛星信号 (コード)

$$L1(t) = a_1 P(t) W(t) D(t) \cos(f_1 t) + a_1 C / A(t) D(t) \sin(f_1 t)$$

$$L2(t) = a_2 P(t) W(t) D(t) \cos(f_2 t)$$

$$L_i(t) = a_i \cos(f_i t) \quad : \text{変調前の搬送波}$$

**P(t) : Pコード、 C/A(t) : C/Aコード、
W(t) : Wコード、 D(t) : 航法メッセージ**

衛星信号

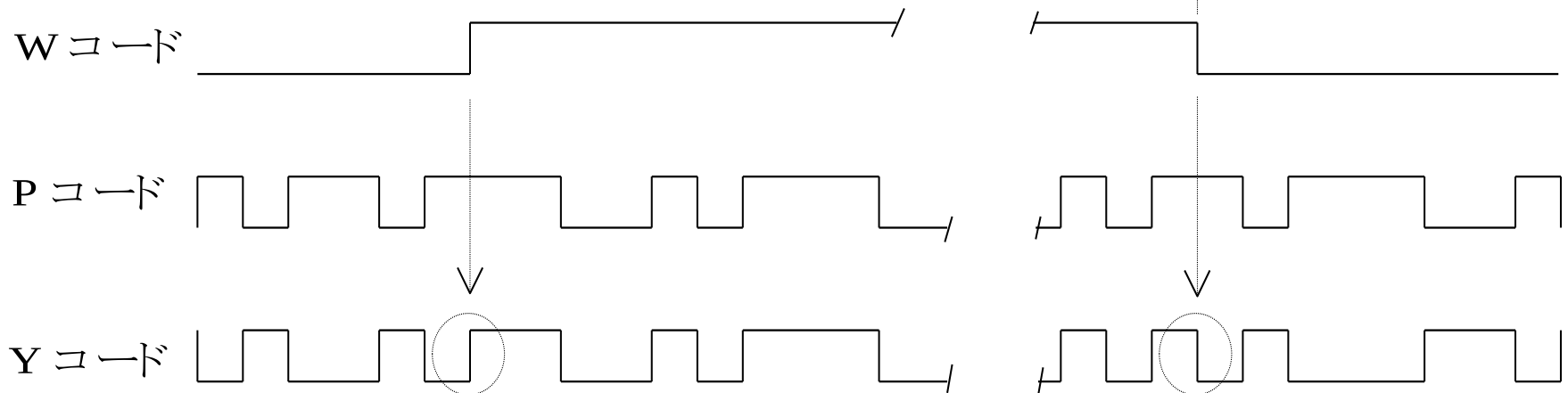
GPS信号の利用制限

- SA, selective availability (選択利用性)
C/Aコードに低速雑音を重畳
- AS, anti-spoofing/encryption (対謀略?)
PコードにWコードを重畳してYコードに変換
- 2000年5月に SA が解除された。

PコードとYコード

Pコード秘匿操作 AS (Encryption)

Wコードのビット率は約0.5 Mbpsか？



Shujiro NISHI

衛星信号—航法メッセージ

サブフレーム1 : GPS週番号、衛星の健康状態、
衛星時計の補正

- サブフレーム2と3 : 衛星の放送暦
- サブフレーム4 : 電離層情報、25番以降の概略暦
- サブフレーム5 : 24番までの衛星概略暦
- 4番目と5番目のサブフレームは、内容が順次交代する25ページの異なるメッセージからなるサブフレーム

全情報の送信には12.5分が必要

衛星信号—航法メッセージ

航法メッセージの構成

	ビット数	送信時間
マスターフレーム	1500×25	12.5分
メインフレーム	1500	30秒
サブフレーム(1—5)	300	6秒
ワード(1—10)	30	0.6秒

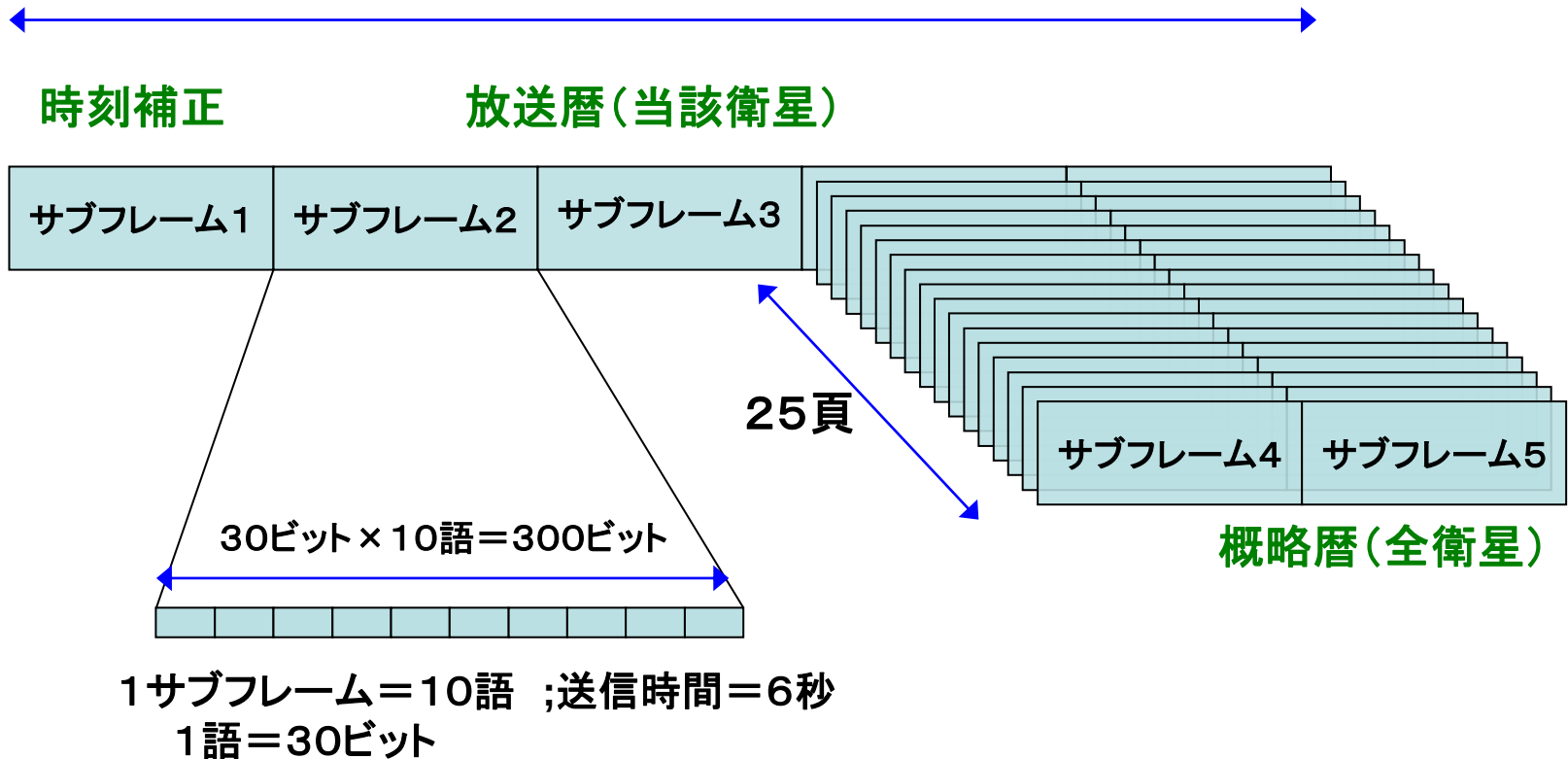
航法メッセージの形式

マスターフレーム=25メインフレーム

送信時間=30秒×25メインフレーム=12.5分

1メインフレーム=5サブフレーム ;送信時間=30秒

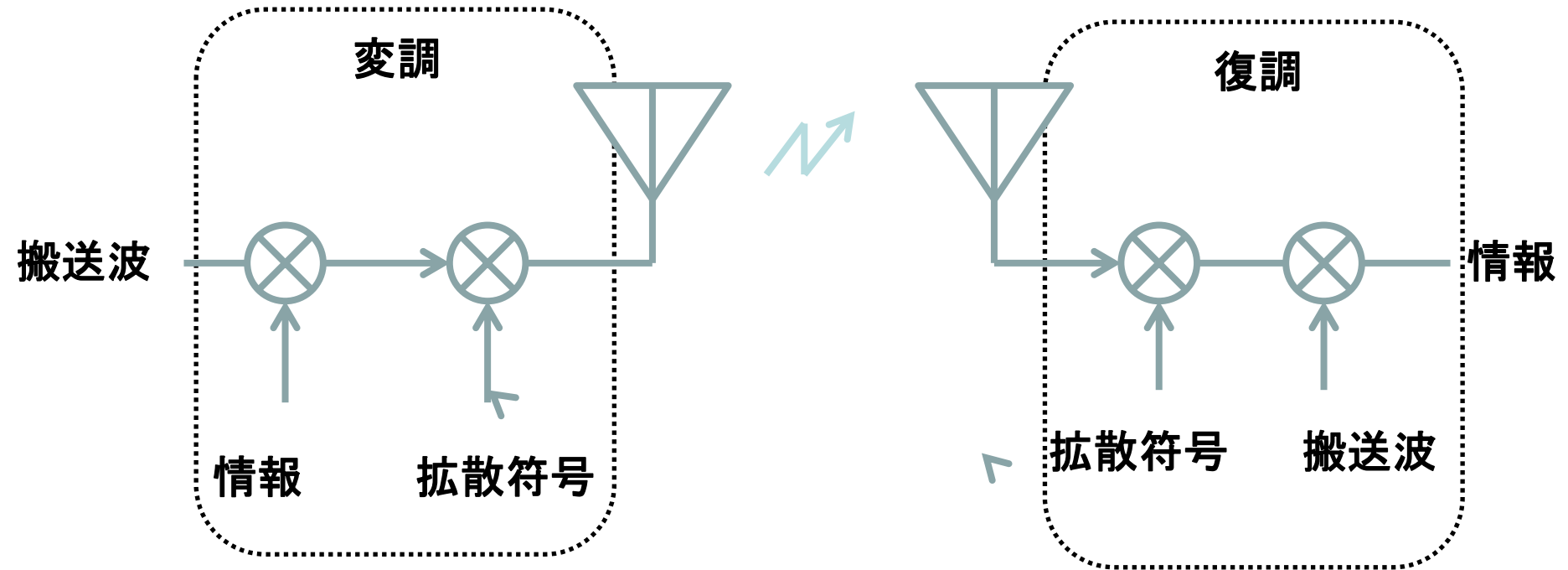
300ビット×5サブフレーム=1500ビット



GPS信号の受信



GPS情報の送信と受信



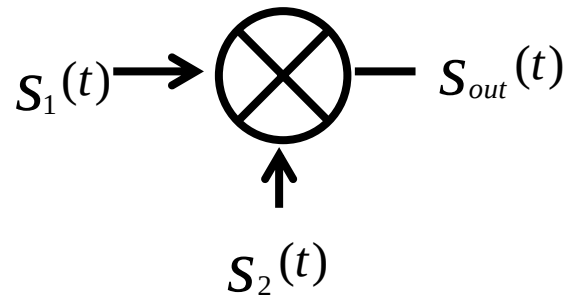
信号を電波に乗せるのが変調で、信号を電波から取り出すのが復調。

ミキサー



信号のかけ合わせ

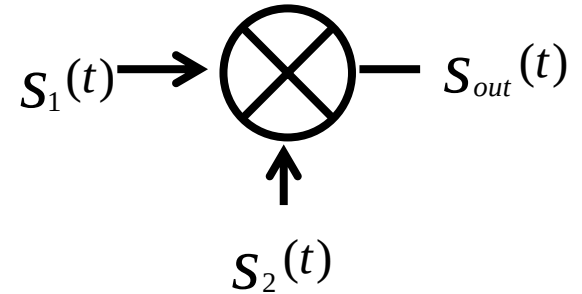
受信機のパーツ ミキサー



ミキサーは、2つの信号を掛け合わせるものである。
文字どうりかけ合わせであるから、数式で表現すると次のように表せる。

$$S_{out}(t) = S_1(t) \times S_2(t)$$

受信機のパーツ ミキサー



ミキサーの例2

入力信号が $S_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ 、 $S_2(t) = \sin(2\pi f_2 t)$ であれば、出力は

$$\begin{aligned} S_{out}(t) &= S_1(t) \times S_2(t) = \sin(2\pi f_1 t) \cdot \sin(2\pi f_2 t) \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) - \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) \} \end{aligned}$$

となる。これは入力信号の周波数をその和と差の周波数に変換することに相当する。

GPSの送信(変調)

搬送波生成

$$S_{in} = \sin(2\pi f_1 t)$$

航法データ

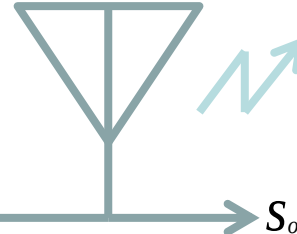


$$S_2(t) = D(t) \sin(2\pi f_1 t)$$

拡散符号生成

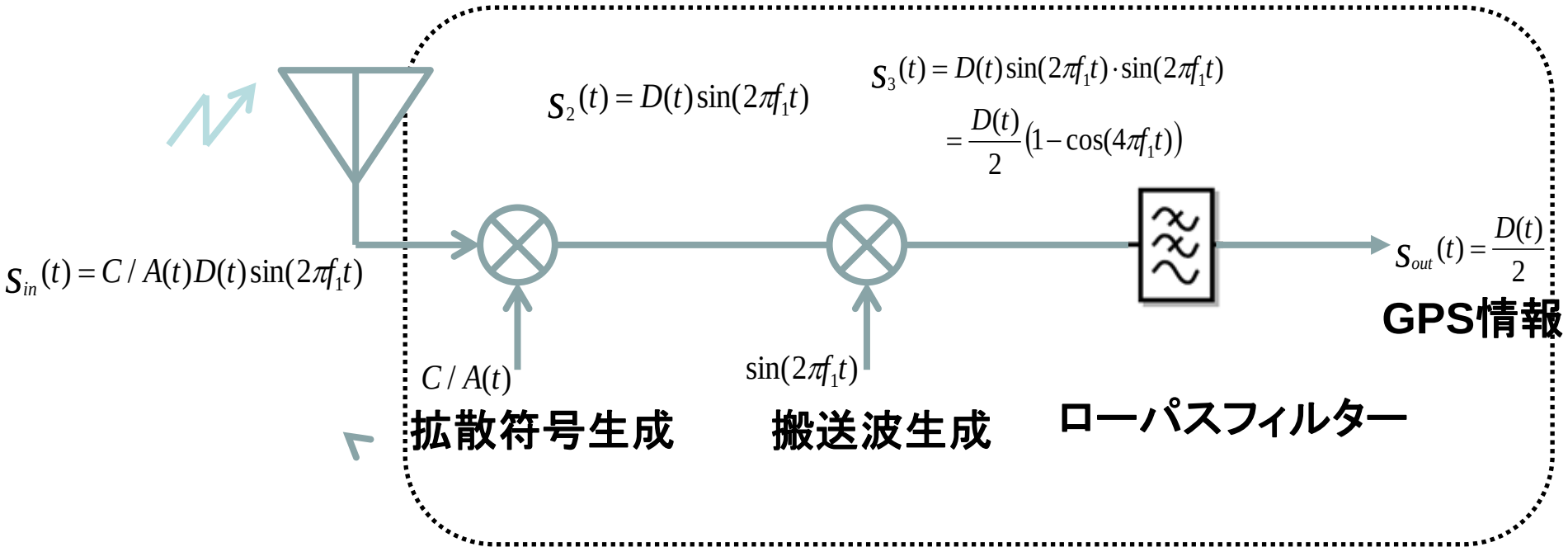


$$C / A(t)$$



$$S_{out}(t) = C / A(t) D(t) \sin(2\pi f_1 t)$$

GPSの受信(復調)



変調

c:コード



S:GPS情報(航法メッセージ)



$S \times c$



搬送波($\cos 2\pi f$)



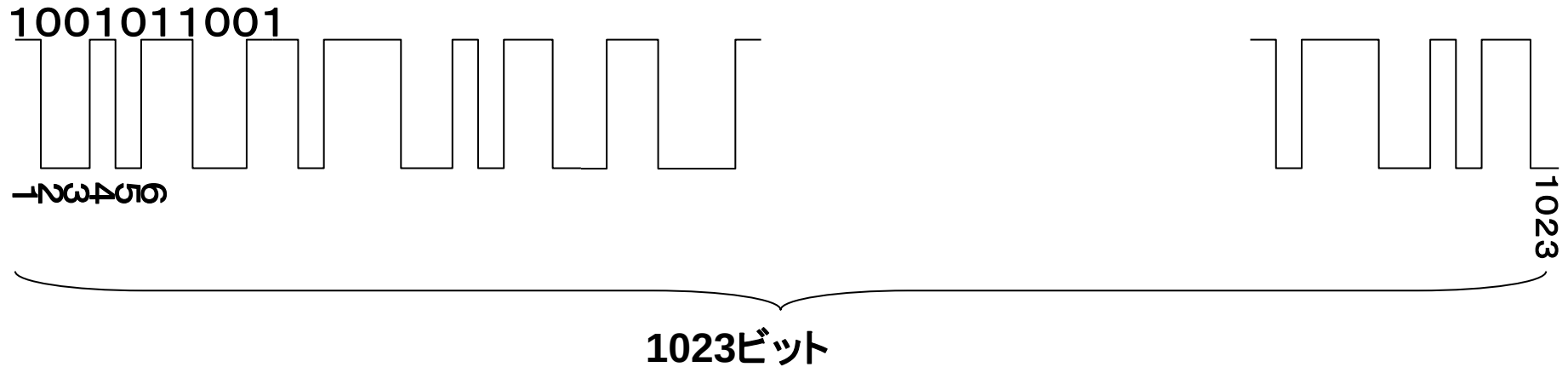
変調波($s \cdot c \times \cos 2\pi f$)



BPSK:二位相偏移変調

コードもGPS情報もデジタル化されており,0か1で表されている。搬送波と掛け合わされる場合、0であれば1を、1の場合は-1を掛けることにすれば、変調波は $\cos 2\pi f$ か $-\cos 2\pi f$ になる。 $\cos 2\pi f$ であれば、搬送波は変化せず $-\cos 2\pi f$ であれば、搬送波の形は反転する(コサイン関数の位相で見ればこれは位相が 180° ずれることに相当する)。

C/Aコード



GPSで使われているC/Aコードは、0と1が1023個連なったもので0と1の出現回数の違いは、1ビット以下

37種類のC/Aコードが用意されており、それぞれが衛星に割り当てられている。

C(1),C(2),.....C(37)

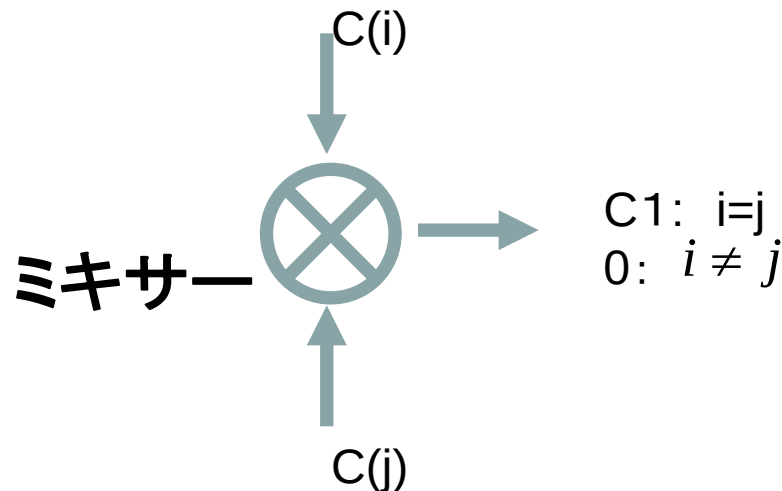
7ビットの例で見たように、その特徴は、自己相関は同期している場合1であるが、違うC/Aコードどうしの相関は限りなくゼロであるということである。

コード信号:衛星の数だけ用意されている。

$C(1), C(2), \dots, C(37)$

違うコード同士を掛け合わせるとゼロになる。 相関ゼロ

同じコード同士を掛け合わせるとゼロにはならない。相関あり
簡単なコードでの例



コードの相関

ここで相関を分かりやすく説明するため、1023ビットのC/Aコードの代わりに、7ビットの簡単な以下のような符号を考える。

$P(1)=0111001$

$P(2)=1011100$

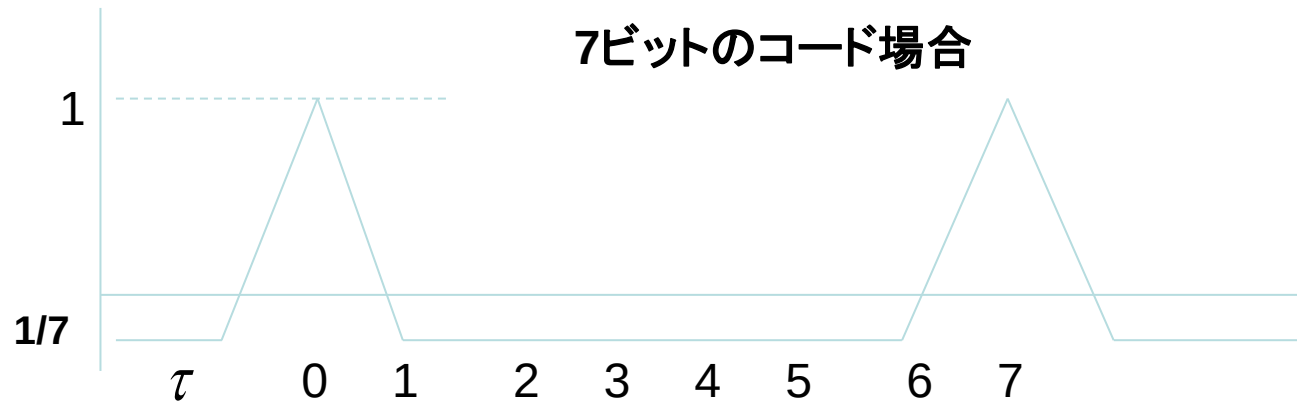
$P(3)=0101110$

$P(4)=0010111$

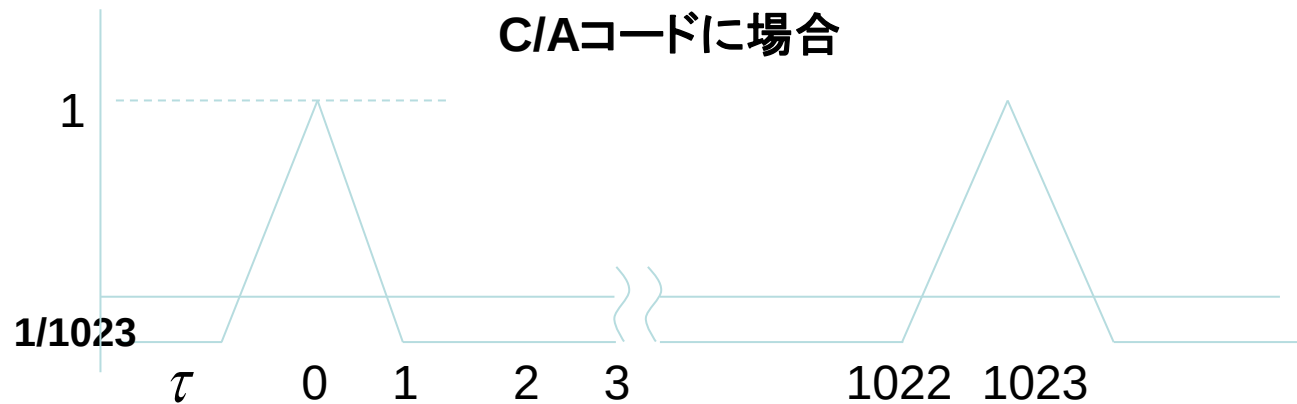
ここで符号の相関値計算を対応するビットが等しい時は1そうでないときは-1として、すべてのビットにわたり足し合わせ、全体をすべてのビットの数で割ったものとする。はじめに $P(1)$ と $p(2)$ の相関を考えてみよう。ビットが等しいのは、3, 4, 5番目の3ビットであるから、相関値は $(+3-4)/7=-1/7$ となる。 $P(1)$ と $p(3)$ あるいは $p(4)$ との相関も同じく $-1/7$ である。 $P(2)$ と $p(3)$ あるいは $p(4)$ との相関も同様であることは容易に確かめられるであろう。次に $p(1)$ と $p(1)$ の自己相関はどうであろうか。これはすべてのビットが等しいから $+7/7=1$ となる。 $P(2), p(3), p(4)$ の自己相関についても同様である。

結局 $p(i)p(j)=1$ $i=j$
 $p(i)p(j)= -1/7$ $i \neq j$

コードの自己相関



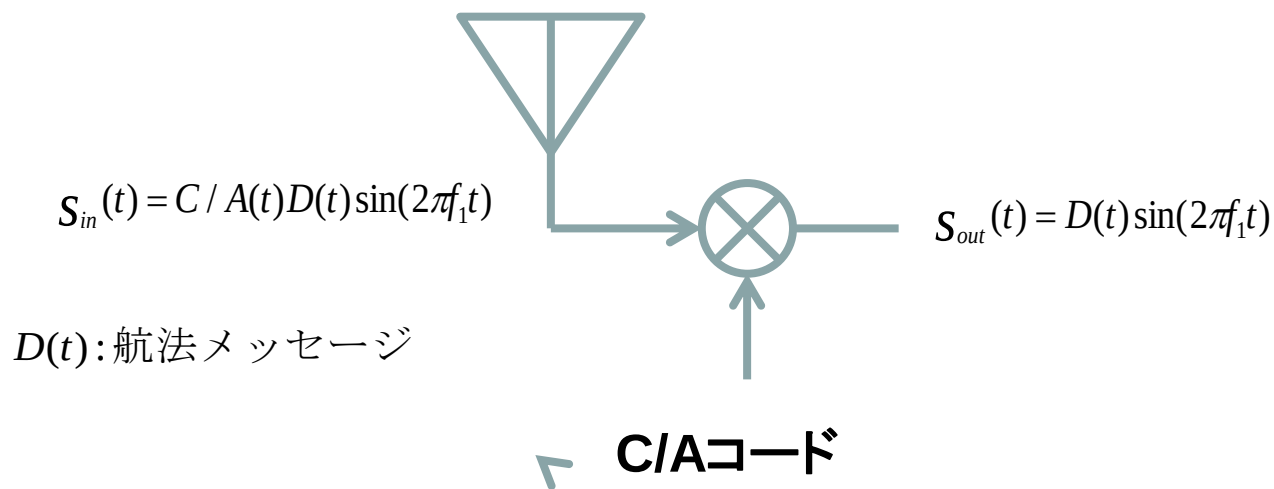
τ : シフト量(位相のずれ)



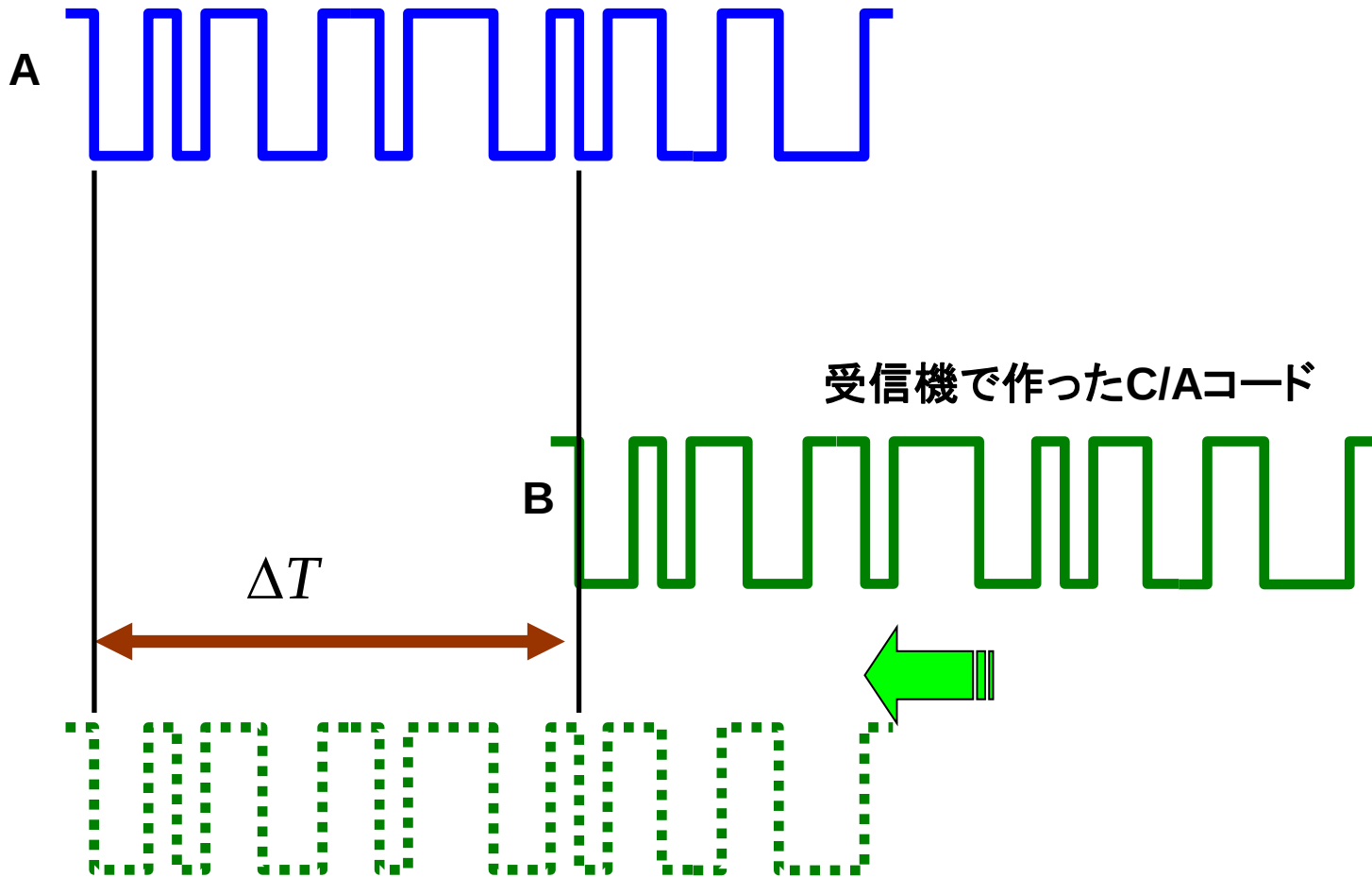
τ : シフト量(位相のずれ)

同じC/Aコード同士の相関係数は、タイミングが揃ったときだけ1になる。

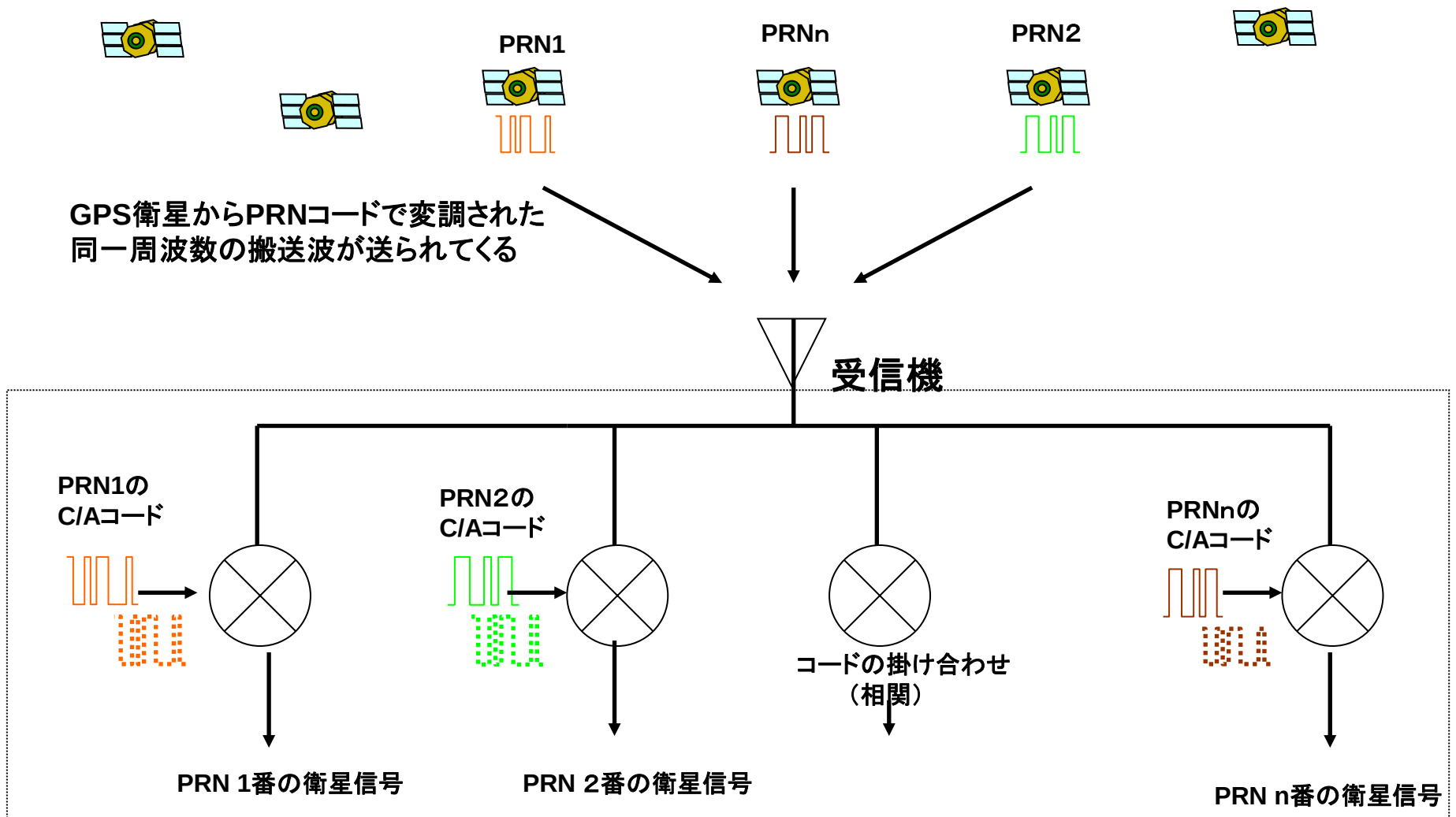
衛星に割り当てられたコードC/Aコードは衛星から搬送波で送られてくる。これを受信機に用意されているC/Aコードとミキサーにかける。するとC/Aコードの相関性質から、同じコードで時間的に合っている場合（同期している場合）のみミキサーの出力が1になり、それ以外はゼロになる。つまり衛星から送られてくるコードが、受信機内に用意されているコードと一致し、かつ同期した場合のみ、衛星情報が出力されてくるのである。これにより、衛星の識別が可能となり、また同期するまで受信機内のコードのビットをずらした時間から電波の伝搬時間を知ることができる。



衛星から送られてきたC/Aコード



BのビットをずらしながらAと相関をとる。BがAと異なるC/Aコードであれば相関係数はゼロに近い値である。BがAと同じC/Aコードであれば、両コードのタイミングが揃った時に相関係数は最大になる。



コードの相関を使ってGPS衛星信号の同期・検波を行なう

3. GPS衛星の軌道



GPS衛星の位置：暦

GPS測位ではGPSの位置は既知として扱う。

- 衛星からは衛星の運動状態を表す“軌道要素”が放送されている。
- GPSの位置は、軌道要素から計算できる。
- この軌道要素を「放送暦」と呼んでいる。

衛星の軌道

地球をまわる人工衛星の
運動



- ニュートンの運動方程式

$$m\ddot{\underline{r}} + \frac{m\mu}{r^3} \underline{r} = \underline{0}$$

μ は地球の重力定数

この運動方程式は2体問題の時は、解析的に解くことができ、その解は、有名なケプラー運動になる。

2体問題を2次元の場合に解いてみる。

□ケプラーの法則の導出

□ニュートンの運動方程式

$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = -\frac{m\mu}{r^3} \mathbf{r}$ を 2 次元平面で解いてみよう。□地球の重心を原点とする直角座

標での衛星の運動方程式

□□□□ $m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = -\frac{m\mu}{r^3} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ □□□ (1) を極座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$ □で表わそう。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \dot{r} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + r \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

であるから (1) は

$$m \left\{ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \right\} = -\frac{m\mu}{r^2} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

となる。□これから極座標での運動方程式は、

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{m\mu}{r^2} & (2) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 & (3) \end{cases}$$

と表せる。

(3) は、 $\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0$ □ と書けるから、これから □

$r^2 \dot{\theta} = h$ (定数) □□□□□□□□□□□□□□□□ (4) +

が得られる。□これは面積速度一定というケプラーの第 2 法則を示している。□これを (2) に代入すると、

$$r \text{ についての方程式 } \square\square\square\square \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (5) \quad \square$$

が得られる。□ここで□新しい変数□ $u = \frac{1}{r}$ □を導入し、 $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}$ □で

あることを考慮すると、

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right) \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta} \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta}\right) = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-h \frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2}\end{aligned}$$

と変換できる。 $\leftarrow$

$$dr = \frac{r^2 e \sin \theta d\theta}{a(1-e^2)} \quad \square \text{を比較すると} \quad \square rdE = (r^2/b)d\theta \quad \square \square \square (1.1) \quad \leftarrow$$

が成り立つのが分かる。 $\square \square$ 一方(4)式から $\square d\theta = hdt/r^2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cdot dt/r^2 \square$ で

あるから、これを(1.1)式に代入すると、 dE と dt の関係は $\square (1-e \cos E)dE = \sqrt{\mu/a^3} \cdot dt \square$

$$\text{となる。これを} \quad \int_{E=0}^E (1-e \cos E)dE = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} dt \quad \leftarrow$$

$$\text{と積分した結果は} \quad \square \square \square \square E + e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-t_0) \quad \square \square \square \square (1.2) \quad \square \leftarrow$$

となる。 $\square$ この式で衛星が軌道を1周すると、 E は 2π 変化し、 $t-t_0$ は周期 T になるか

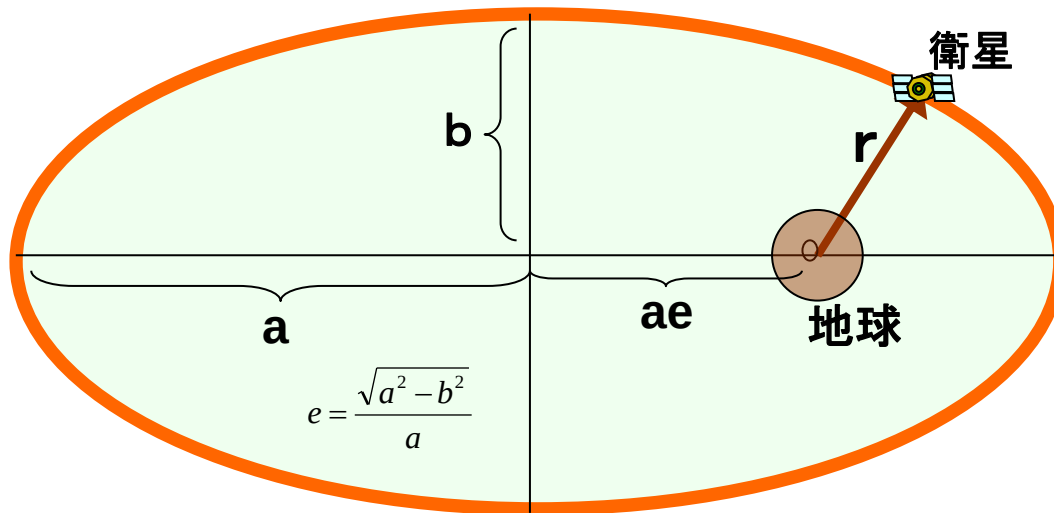
ら $\square 2\pi = \sqrt{\mu/a^3} \cdot T \square$ が成り立つ。 $\square$ 書き直すと $\square T^2/a^3 = 4\pi^2/\mu \square$ である。 $\square$ すなわ

ち周期の2乗と長半径の3乗の比は一定であるというケプラーの第3法則を表している。 $\square$

$$(1.2) \text{ 式を} \quad \square E + e \sin E = n(t-t_0) = M \quad \square \square \square (1.3) \quad \square \leftarrow$$

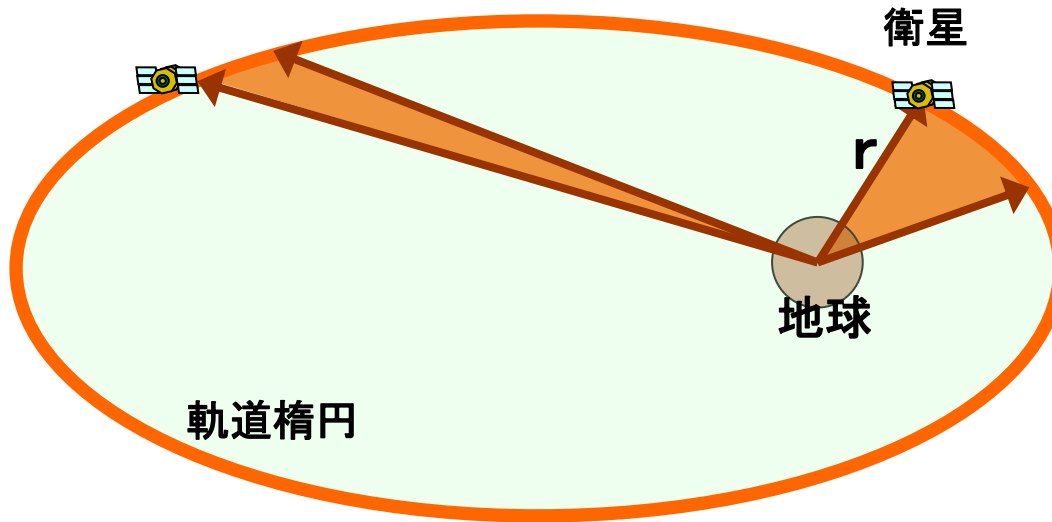
ケプラーの第1法則

衛星は地球の重心を一つの焦点とする楕円軌道を描く。



ケプラーの第2法則

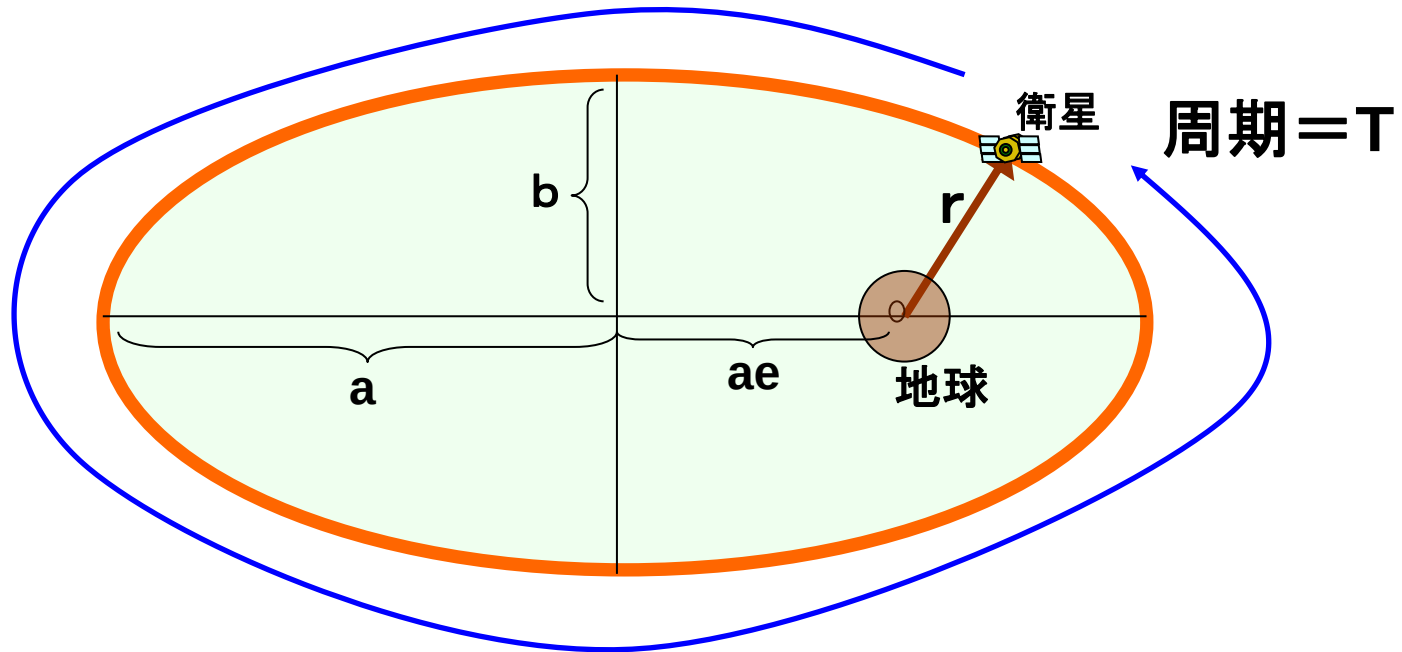
衛星の動径ベクトルが単位時間に掃く面積(面積速度)は一定である。



$$\text{面積速度} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{定数}$$

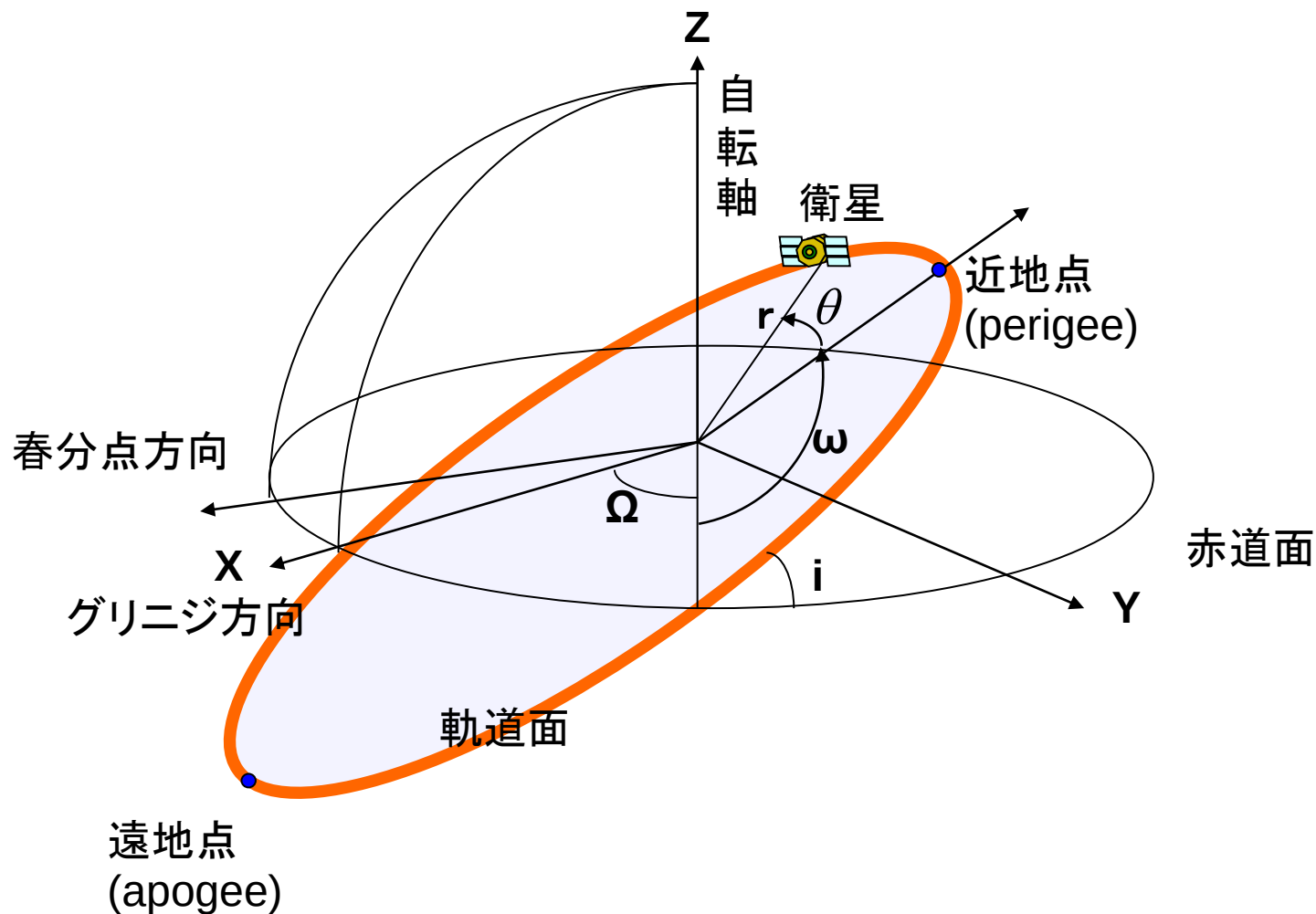
ケプラーの第3法則

周期の2乗と長半径の3乗の比は一定である。



$$\frac{T^2}{a^3} = \text{一定}$$

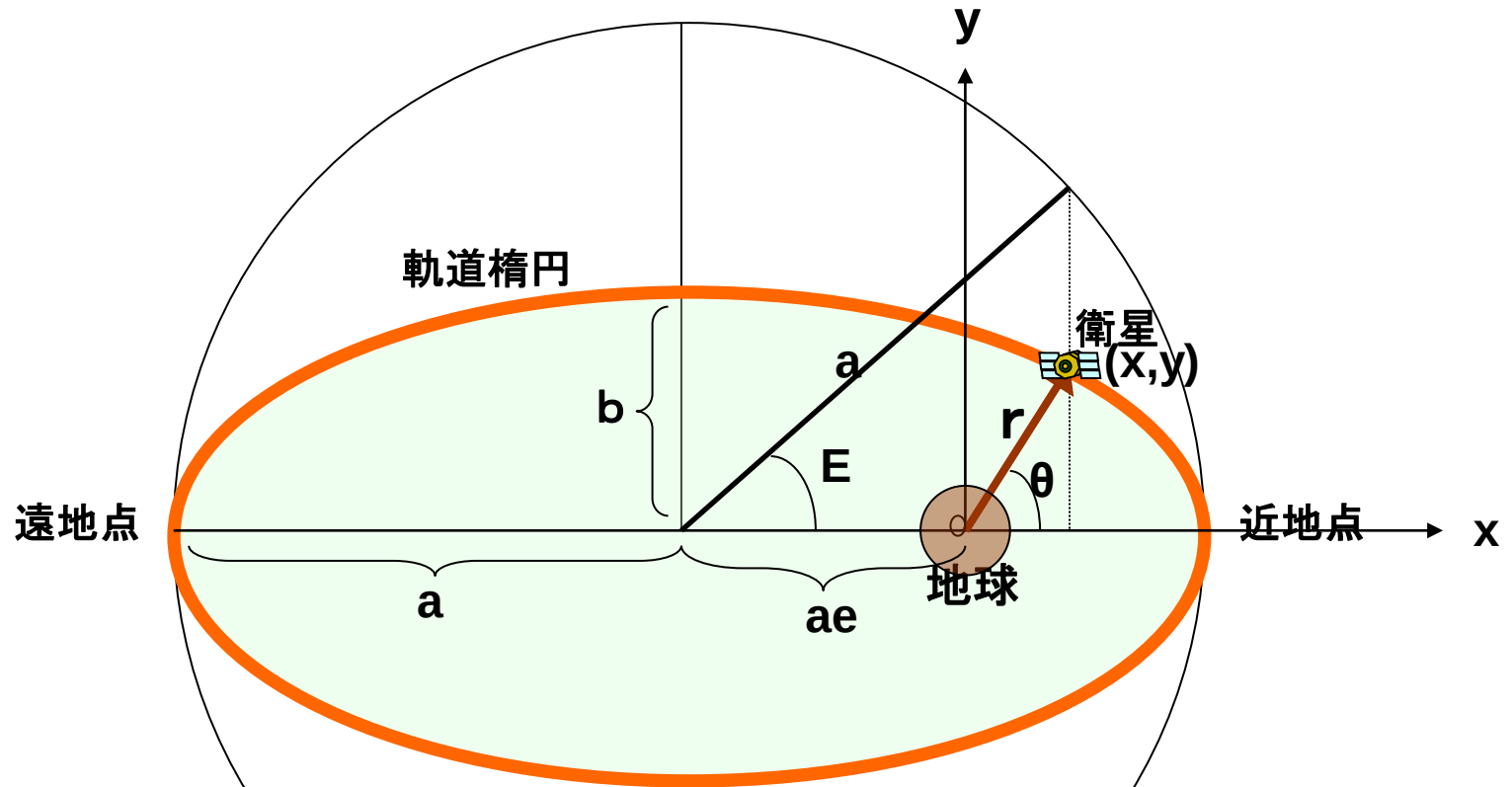
軌道面とWGS84系(XYZ)



ケプラー運動の軌道要素

Ω	昇交点赤経
i	軌道面傾斜
ω	近地点引数
a	軌道楕円の長半径
e	楕円の離心率
t_0	近地点通過時刻

軌道平面



地球の重心が軌道楕円の1つの焦点になっている

接触円

衛星軌道

軌道平面での表現 I

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos E - e \\ \sqrt{1-e^2} \sin E \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

軌道面内の位置は、 θ あるいは E が分れば求まる。

θ は真近点離角、 E は離心近点離角と呼ばれている。

衛星軌道

軌道平面での表現Ⅱ

$$E + e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0)$$

E は近地点通過からの経過時間 $t - t_0$ が与えられれば、このケプラー運動の解から計算される。この式の右辺を M とおくと $E + e \sin E = M$ となる。M は平均近点離角と呼ばれている。

$$\left(M = n(t - t_0) \right) \quad \text{ただし } n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad \text{Shujiro NISHI}$$

①平均近点離角 M : 平均速度で動く仮想衛星の近点離角
 ②離心近点離隔 E : 計算の補助で使う近点離角
 ③真近点離角 θ : 実際の衛星の近点離角

近点離角の計算

①平均近点離角の計算

$$M = n(t - t_0)$$

②離心近点離角の計算

$$E + e \sin E = M$$

③真近点離角の計算

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e} \right]$$

Shujiro NISHI

ケプラー軌道からのずれ(摂動)

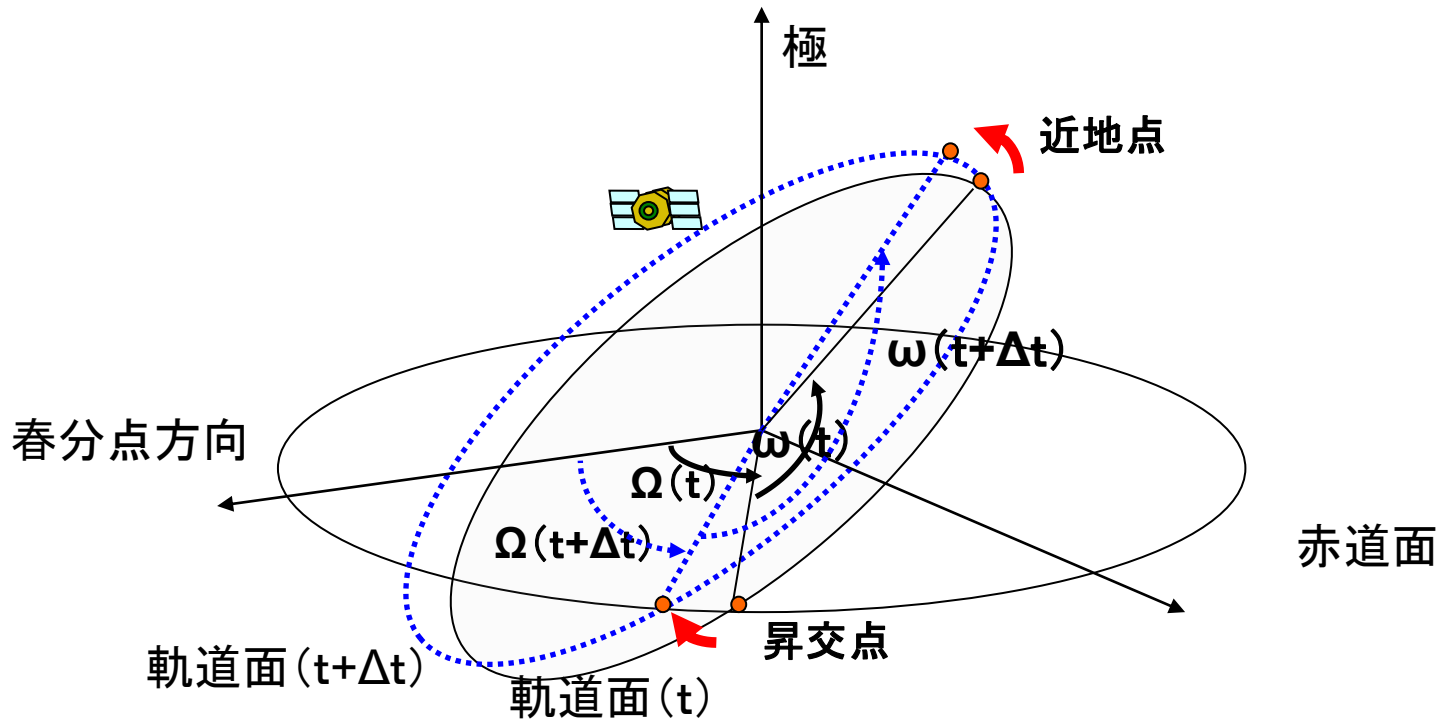
実際の衛星の運動は、楕円運動にはならない。

以下に示す原因のためケプラー軌道からずれるのである。

重力	地球の球形からのずれ 10^{-4} 潮汐力(直接的、間接的) 10^{-5}
重力以外	太陽輻射圧(直接的、間接的) 10^{-6} 空気抵抗 相対論効果 その他(太陽風、磁場)

(数字は球形な地球の引力に比較しての大きさ)。

楕円軌道の変化



昇交点や近地点等の位置が時間と共に
変化し、軌道面が動いていく。

放送暦にはこの摂動を計算するための補正係数等が含まれている。

t_e	基準時刻
$\sqrt{a}$	長半径の平方根
Δn	平均運動
e	離心率
M_0	平均離角
ω_0	近地点引数
i_0	軌道傾斜角
ℓ_0	昇交点赤経
$\dot{i}$	傾斜角の変化率
$\dot{\Omega}$	昇交点赤経の変化率
C_{uc}, C_{us}	補正係数
C_{rc}, C_{rs}	補正係数
C_{ic}, C_{is}	補正係数
t_c	衛星時計の基準時刻
$a_0 \ a_1 \ a_2$	衛星時計補正係数

衛星位置計算の手順

放送暦を使ってGPS衛星のWGS84座標を計算

- 近点離角（近地点から衛星までの角度）の計算
平均近点離角→離心近点離角→真近点離角
- 摂動計算（動径方向、飛行方向、およびこれらに直角方向）
- 軌道面座標の計算
- 軌道面座標からWGS84座標へ変換
 - 軌道面座標→天球座標→WGS84

具体的手順(1)

1) 平均運動



2) 平均近点離角



3) 離心近点離角



4) 真近点離角

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad n = n_0 + \Delta n$$

$$M = M_0 + n(t - t_0)$$

$$E + e \sin E = M$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{\cos E - e} \right]$$

Shujiro NISHI

具体的手順 (2)

5) 摂動の計算



$$u = \phi + C_{uc} \cos(2\phi) + C_{us} \sin(2\phi)$$

$$r = a(1 - e \cos E) + C_{rc} \cos(2\phi) + C_{rs} \sin(2\phi)$$

$$i = i_0 + \dot{i}(t - t_e) + C_{\phi^c} \cos(2\phi) + C_{is} \sin(2\phi)$$

$\phi^c = \omega_0 + \theta$

$$\Omega = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_E)(t - t_e) - \omega_E \cdot t_e$$

6) 2D 軌道面 座標



$$x = r \cos u, y = r \sin u$$

7) WGS84 座標

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_3(-\Omega)R_1(-i) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \cos i \\ \sin \Omega & \cos \Omega \cos i \\ 0 & \sin i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

衛星軌道

暦

- GPS衛星の軌道位置を表すものとして、概略暦、放送暦、精密暦の三つの暦がある。

暦の精度

暦	精度	提供	更新間隔
概略暦	数キ口		6日毎
放送暦	1m	即時	4時間毎
精密暦(IGS)			
超速報暦(予報)	5cm	即時	6時間毎
超速報暦(決定)	3cm	3時間後	6時間毎
速報暦	2.5cm	17時間後	1日毎
最終暦	2.5cm	12日後	1週間毎

4. GPSの観測量



Shujiro NISHI

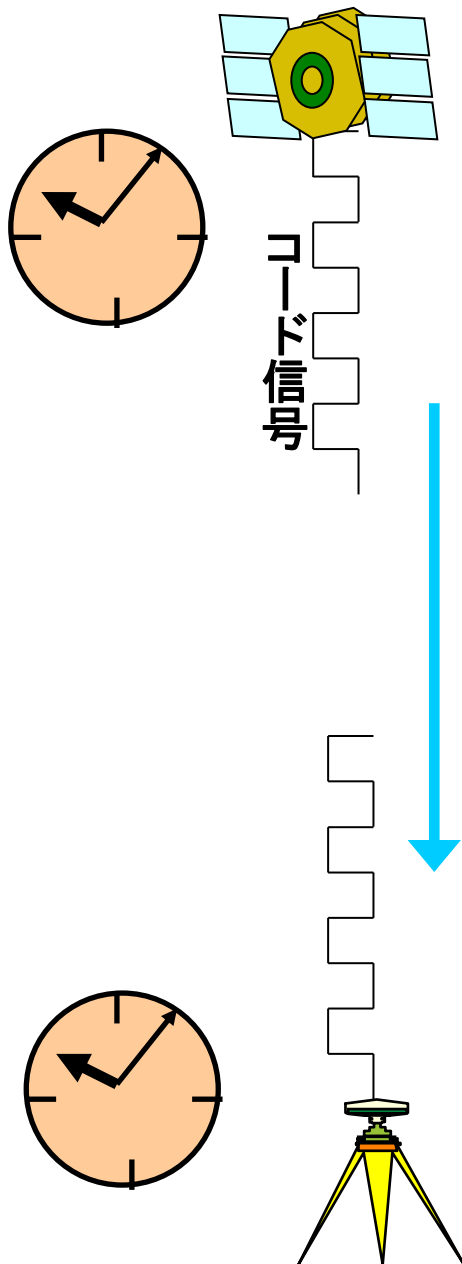
4-1 コード観測



Shujiro NISHI

コード観測

t_s : 信号発射時刻



信号伝播時間 = $t_R - t^S$

コード擬似距離 $R = c(t_R - t^S)$

t_R : 信号受信時刻

コード観測－信号伝播時間

t^S : 信号放出時の衛星時計の読み

t_R : 信号受信時の受信機時計の読み

δ^S : 衛星時計の遅れ、 δ_R : 受信機時計の遅れ

Δt : 衛星時計と受信機時計の読みの差

$$\begin{aligned}\Delta t = t_R - t^S &= [t_R(GPS) + \delta_R] - [t^S(GPS) + \delta^S] \\ &= \Delta t(GPS) + \Delta\delta,\end{aligned}$$

ここで $\Delta t(GPS) = t_R(GPS) - t^S(GPS)$ $\Delta\delta = \delta_R - \delta^S$

コード観測—コード擬似距離(1)

衛星時計と受信機時計の読みの差 Δt に、光速度 c を掛けたものがコード擬似距離 R である。

$$R = c\Delta t = c\Delta t(GPS) + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta$$

ここで ρ は時刻 $t^s(GPS)$ での衛星位置と時刻 $t_R(GPS)$ での受信機位置との間の幾何学的距離である。

コード観測ーコード擬似距離(2)

コード擬似距離の方程式

$$R = \rho + c\Delta\delta$$



観測コード擬似距離



衛星受信機間距離
未知量(受信機の座標)



衛星と受信機時計誤差
未知量

コード観測ーコード擬似距離(3)

誤差を含むコード観測の距離ということで
コード擬似距離と呼ばれている。

$$R = \rho + c\Delta\delta$$

擬似距離＝正しい距離＋距離誤差

4-2 位相観測



Shujiro NISHI

位相

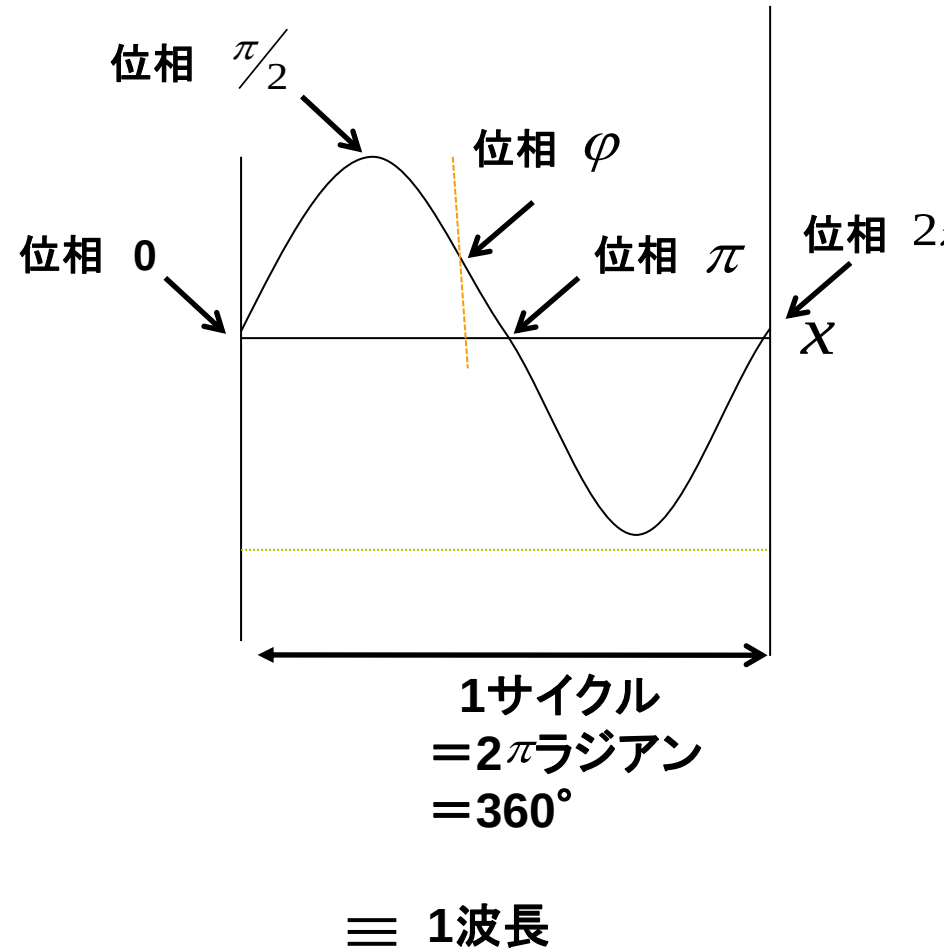
ある瞬間の波(電波)の状態を表す
ものとして“位相”が定義される。

位相

位相の単位

角度、ラジアン、サイクル
で表されるが、GPSでは
サイクル単位が一般的。

角度	ラジアン	サイクル
0°	0	0
90°	$\pi/2$	$1/4$
180°	π	$1/2$
360°	2π	1



位相と距離

位相と距離との関係式(サイクル単位)

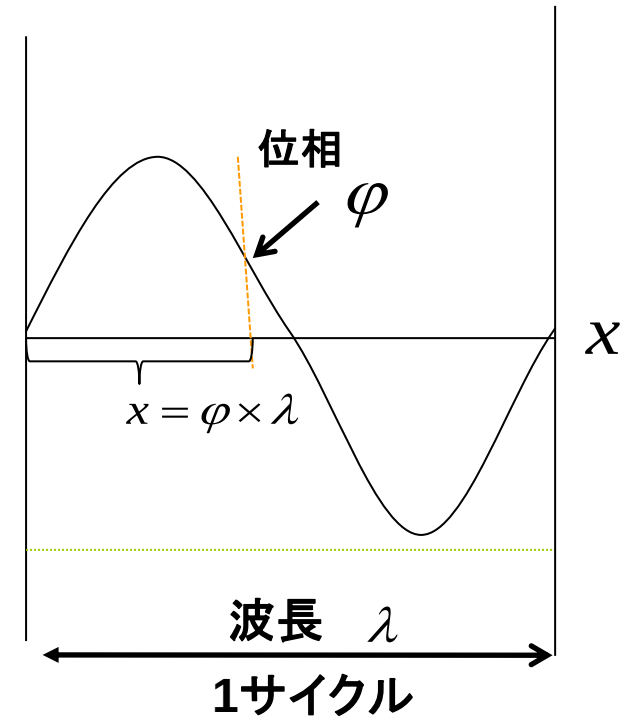
1 波長 λ 進むと1サイクルの位相変化

波の状態(位相) を 距離に換算

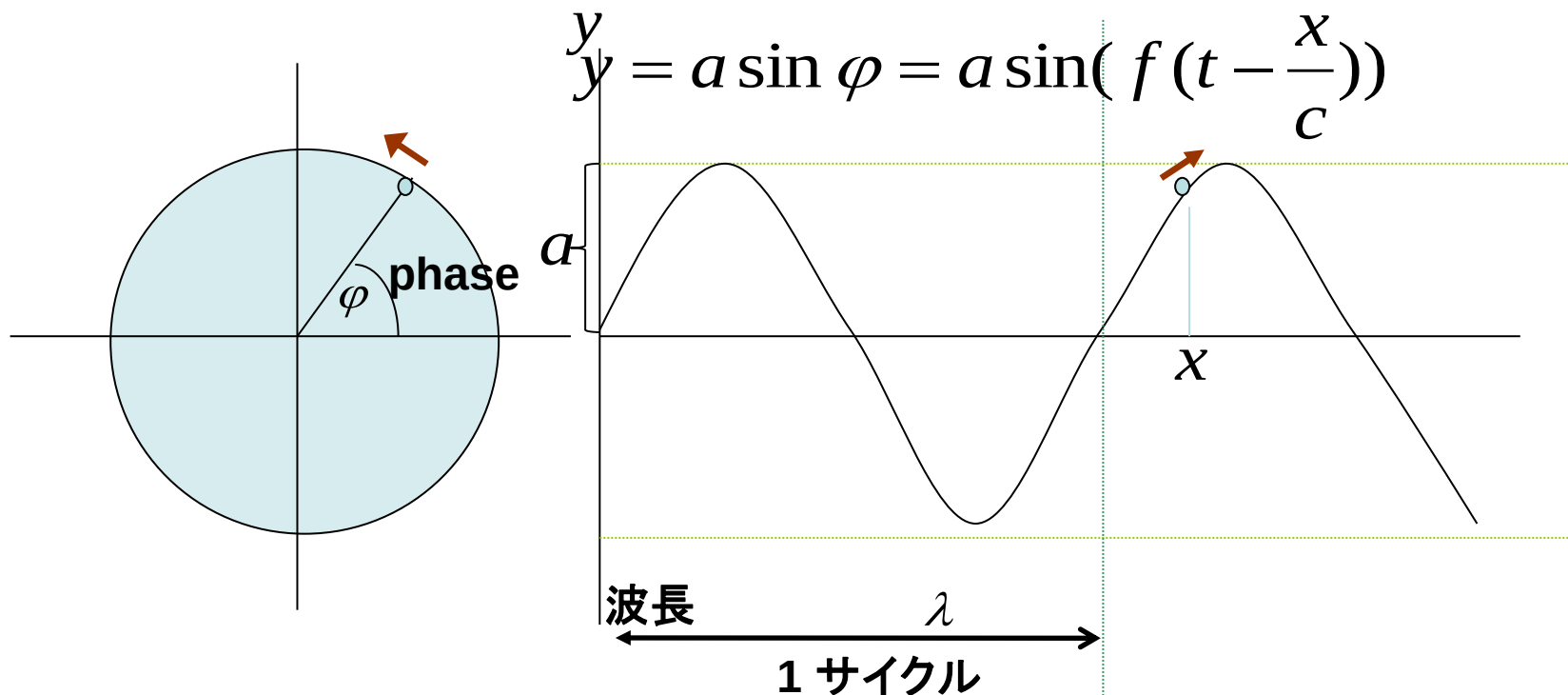
位相(サイクル)	位相(度)		距離
0	0°	→	0
$\frac{1}{4}$	90°	→	$\frac{\lambda}{4}$
$\frac{1}{2}$	180°	→	$\frac{\lambda}{2}$
1	360°	→	λ

すなわち距離 x は、位相 φ を使って以下の式であらわせる。

$$\varphi \quad x = \varphi \times \lambda$$



一般的な位相の式 搬送波

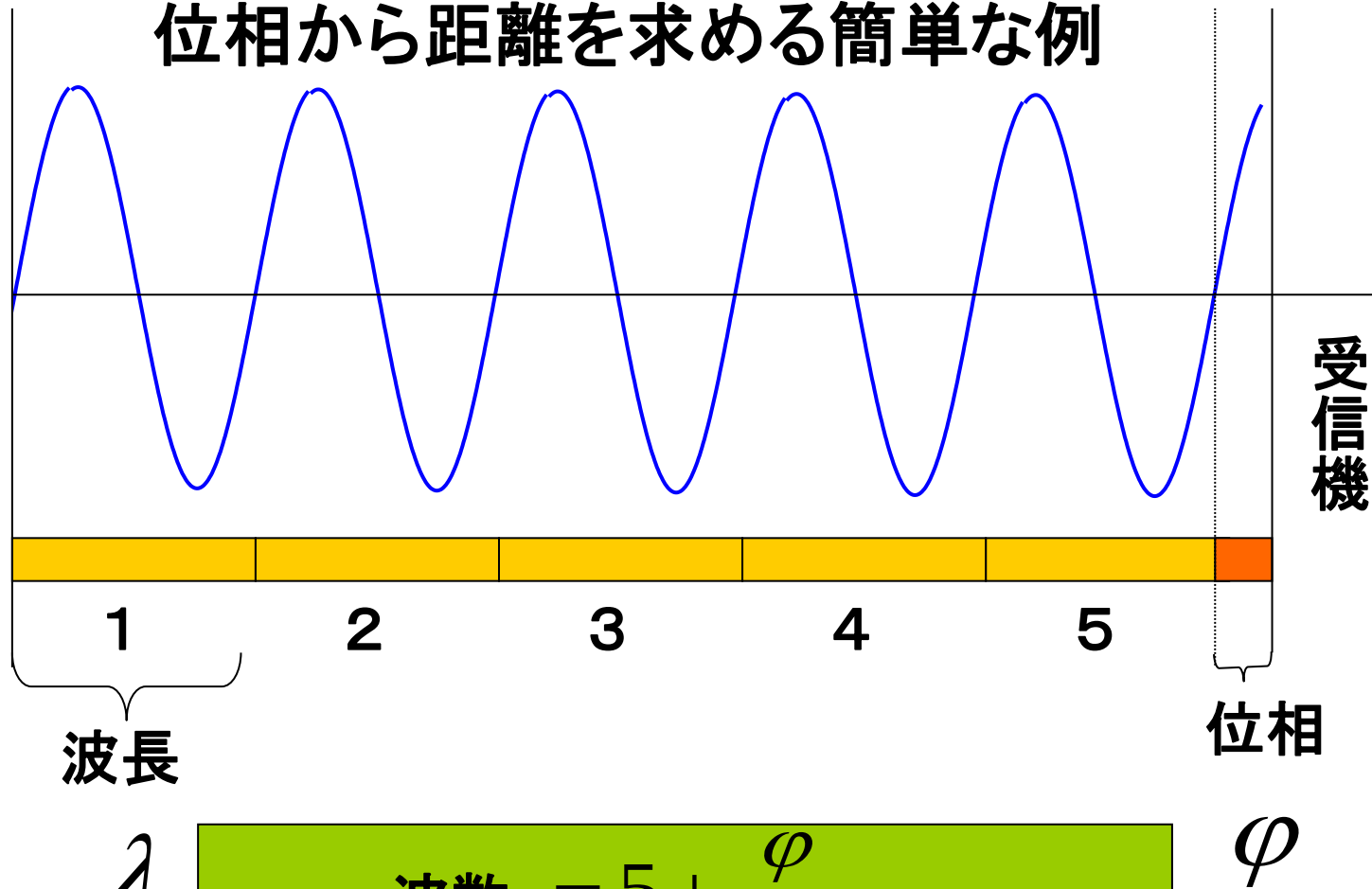


発信源から距離 x 離れた場所の時刻 t での波の位相

は次のように表される。

$$\varphi = f \cdot t - \frac{x}{\lambda} = f(t - \frac{x}{c})$$

位相から距離を求める簡単な例



$$\text{波数} = 5 + \frac{\varphi}{2\pi}$$
$$\text{距離} = \text{波長} \times \text{波数} = \lambda \left(5 + \frac{\varphi}{2\pi} \right)$$

衛星からの搬送波位相

(衛星を出た波が受信器で測定されるまでに、
どのような位相変化をするか見てみよう。)

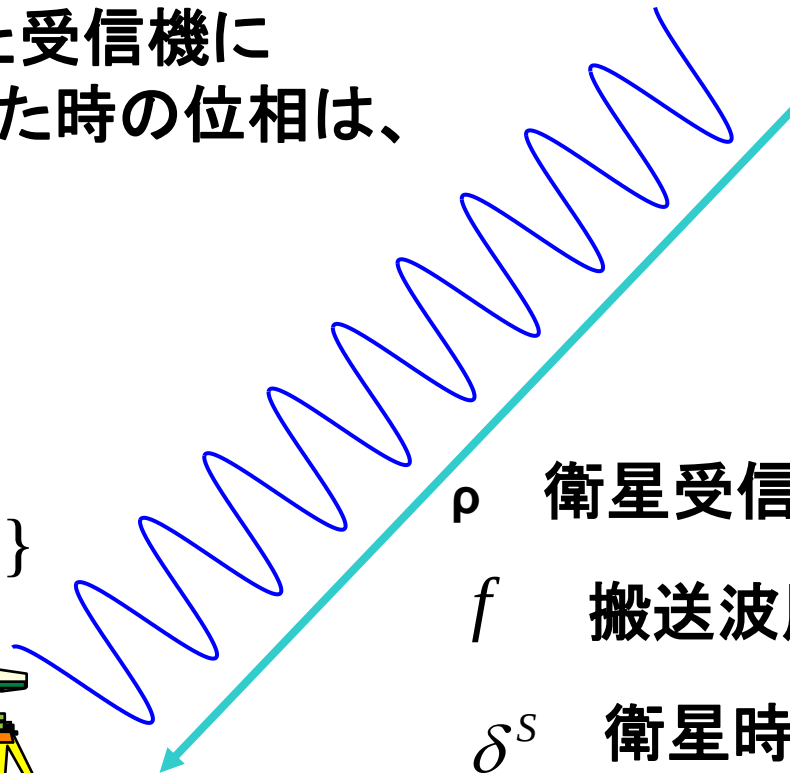
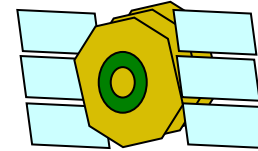
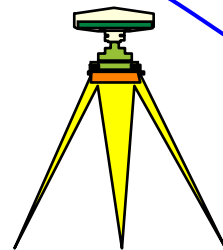
衛星から ρ 離れた受信機に
時刻 t に到着した時の位相は、
 $\varphi^s(t)$ で表される。

$$\varphi^s(t) = f \left\{ \left(t - \frac{\rho}{c} \right) + \delta^s \right\}$$

ρ 衛星受信機間距離

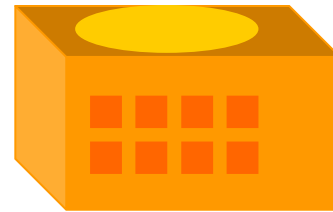
f 搬送波周波数

δ^s 衛星時計誤差



受信機内で生成される搬送波の位相
は、 $\varphi_R(t)$ で表される。

$$\varphi_R(t) = f(t + \delta_R)$$



f 受信機の基準周波数

δ_R 受信機の時刻誤差

受信機では、衛星からの搬送波と
受信機内の搬送波がMIXされた
ビート信号の位相が測定される。

衛星からの搬送波位相

$$\varphi^s(t)$$

増幅器

mixer

filter

$$\varphi_R(t) - \varphi^s(t)$$

ビート位相

受信機内の基準波位相

$$\varphi_R(t) = f(t + \delta_R)$$

基準発信機

Shujiro NISHI

観測位相（ Φ :ビート位相が観測される。）

前頁の図からビート位相は、次式のように表される。

$$\begin{aligned}\Phi &= \varphi_R(t) - \varphi^S(t) + N_R^S = f(t + \delta_R) - f\left\{\left(t - \frac{\rho}{c}\right) + \delta^S\right\} + N_R^S \\ &= f \frac{\rho}{c} + f(\delta_R - \delta^S) + N_R^S\end{aligned}$$



$$\Phi = \frac{\rho}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} \Delta\delta + N_R^S$$

N_R^S (アンビギュイティー)が式に含まれているのは、位相はサイクル単位では、整数値分だけ不定な性質をもつためである。

N_R^S は、整数値。

$\lambda = c / f$:波長

位相観測

位相観測の方程式

$$\Phi = \frac{1}{\lambda} \rho + \frac{c}{\lambda} \Delta\delta + N$$

↑
観測位相

↑
衛星受信機間距離
未知量(受信機の座標)

↑
衛星と受信機時計誤差
未知量

↑
アンビギュイティー
未知量

$$\Phi = \frac{\rho}{\lambda} + \frac{c}{\lambda} \Delta \delta + N_R^S$$

衛星の位置を (x^S, y^S, z^S) 、受信機の位置を (x_R, y_R, z_R) とすれば、衛星—受信機間の距離 は

$$\rho = \sqrt{(x^S - x_R)^2 + (y^S - y_R)^2 + (z^S - z_R)^2}$$

と表せるから、この位相の観測方程式は、未知量 (x_R, y_R, z_R) と観測量 Φ を結びつける位相観測測位の基本式になる。

位相観測

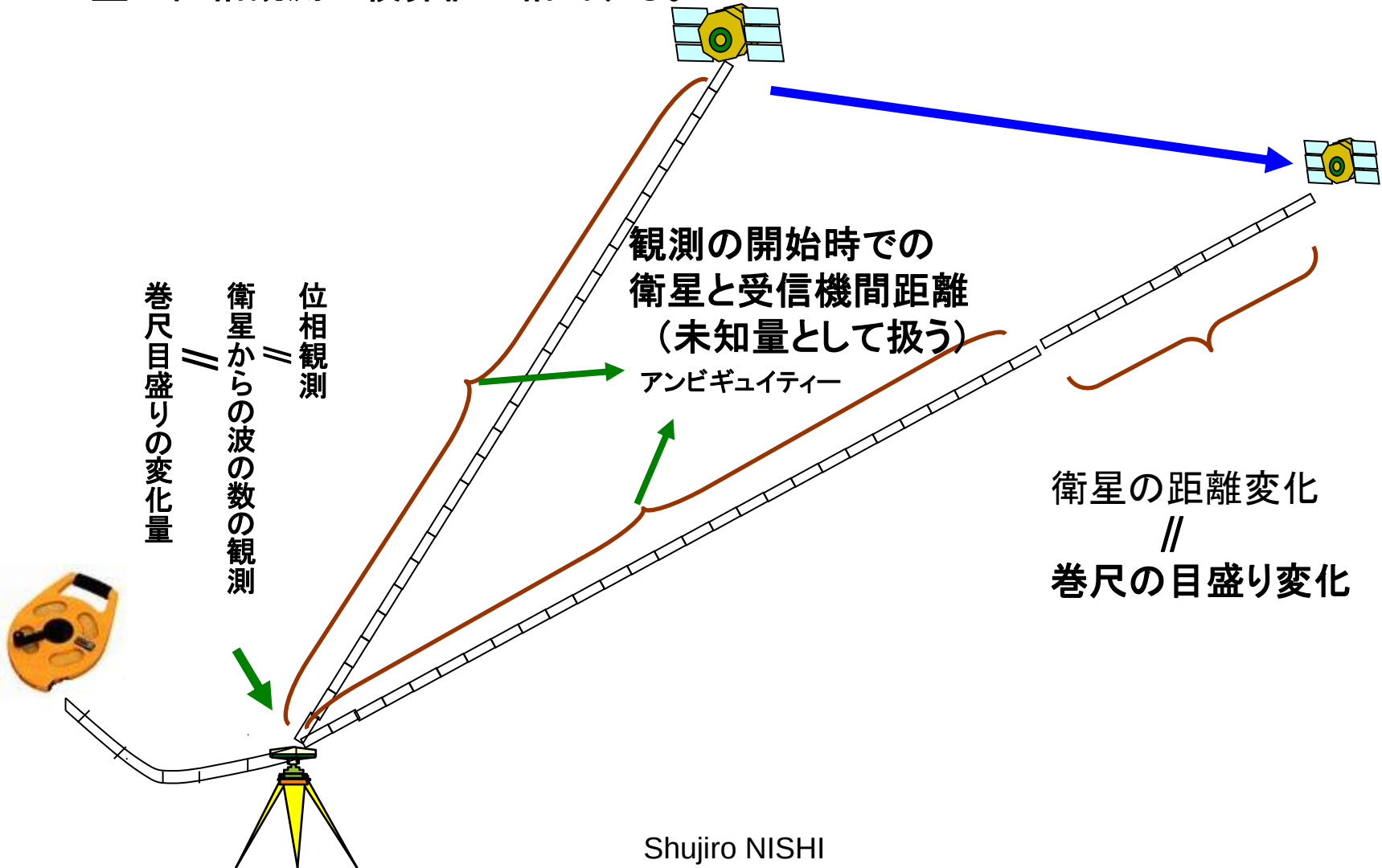
$$\Phi = \frac{1}{\lambda} \rho + \frac{c}{\lambda} \Delta \delta + N$$

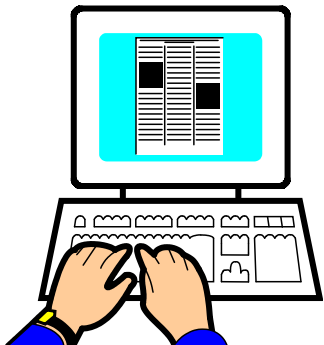
位相観測の式で両辺に波長 λ を掛けて、位相を距離の単位にするとコード擬似距離式と良く似た

$$\Psi = \lambda \Phi = \rho + c \Delta \delta + \lambda N$$

となる。これは**位相擬似距離**の式と呼ばれている。

位相観測を、約20センチ幅の目盛りを持つ巻尺が衛星の運動につれ引き出されていく様子に例えると；
巻尺には目盛り数値はないから、この観測で分かるのは、ある時刻からある時刻まで何目盛り分巻尺が引き出されたかだけである。
この量が位相観測の積算値に相当する。





5. GPS の位置決定原理

Shujiro NISHI

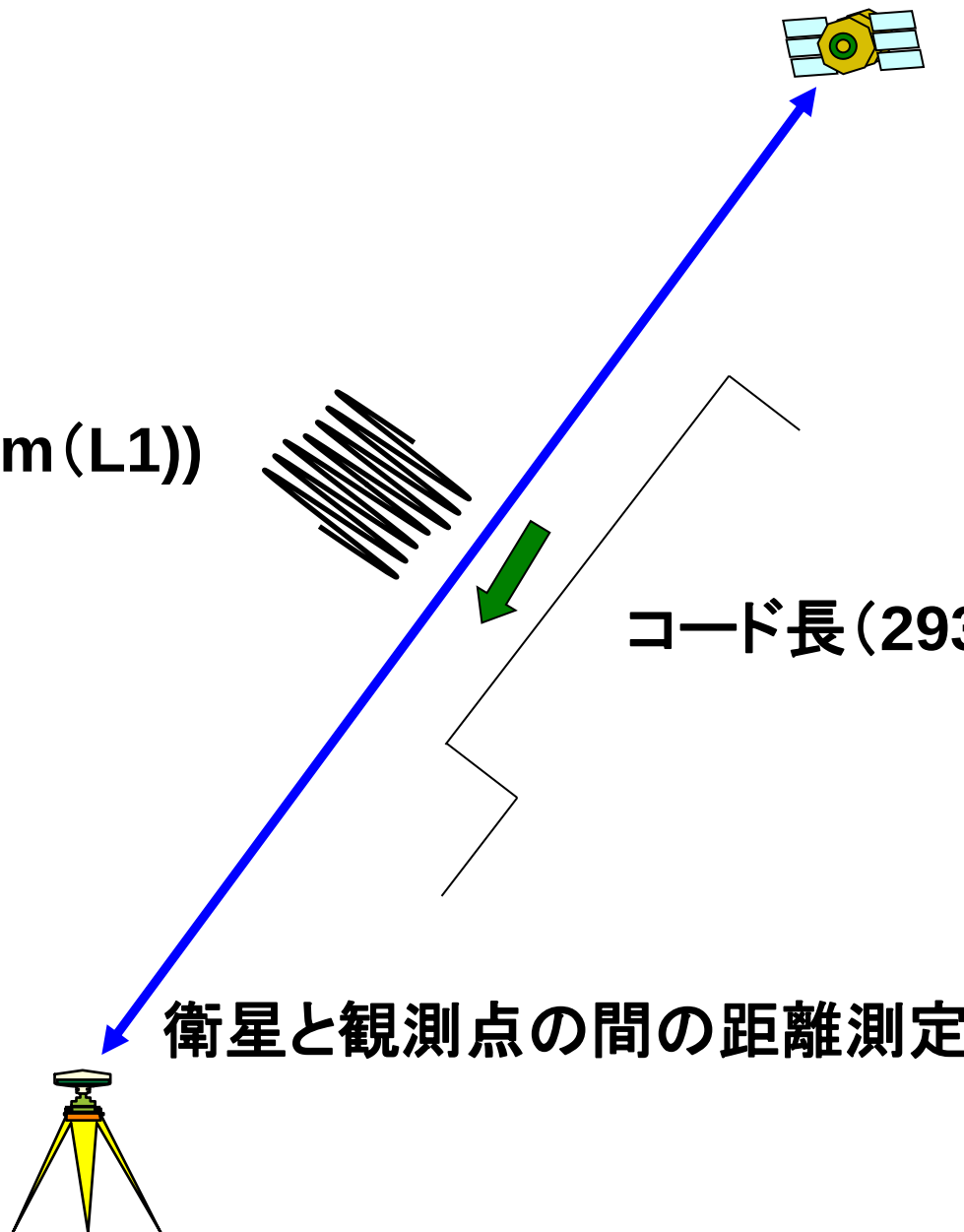


GPS測位

位置の分っている衛星と観測点の間の距離を測定することで、観測点の位置を求める。

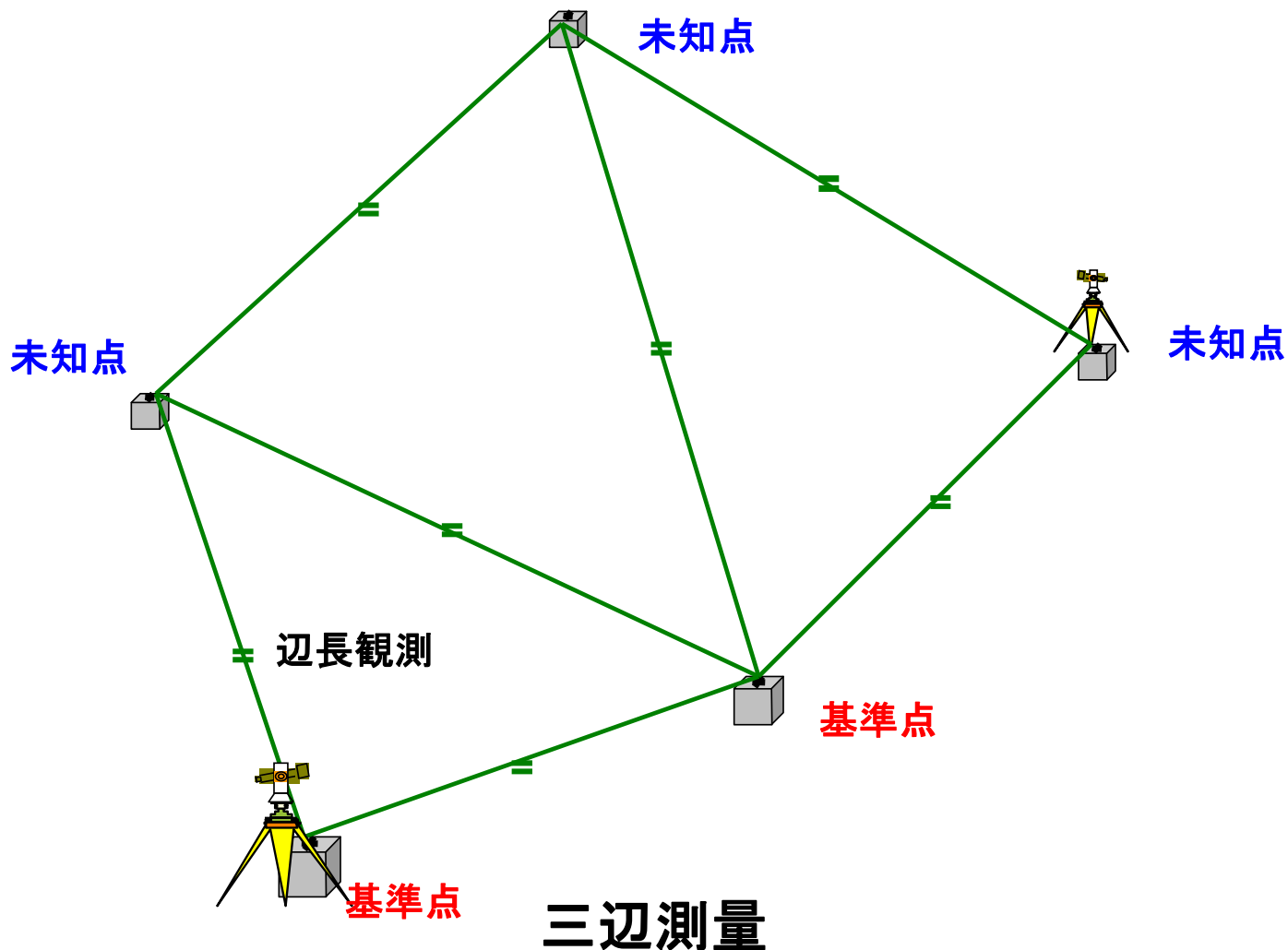
- 距離測定には2種類の“ものさし”が使われる。
 - 1) コード信号 (1目盛り約300m) : ナビ
 - 2) 搬送波 (1目盛り: 約20cm) : 測量

搬送波長 (19.0cm (L1))

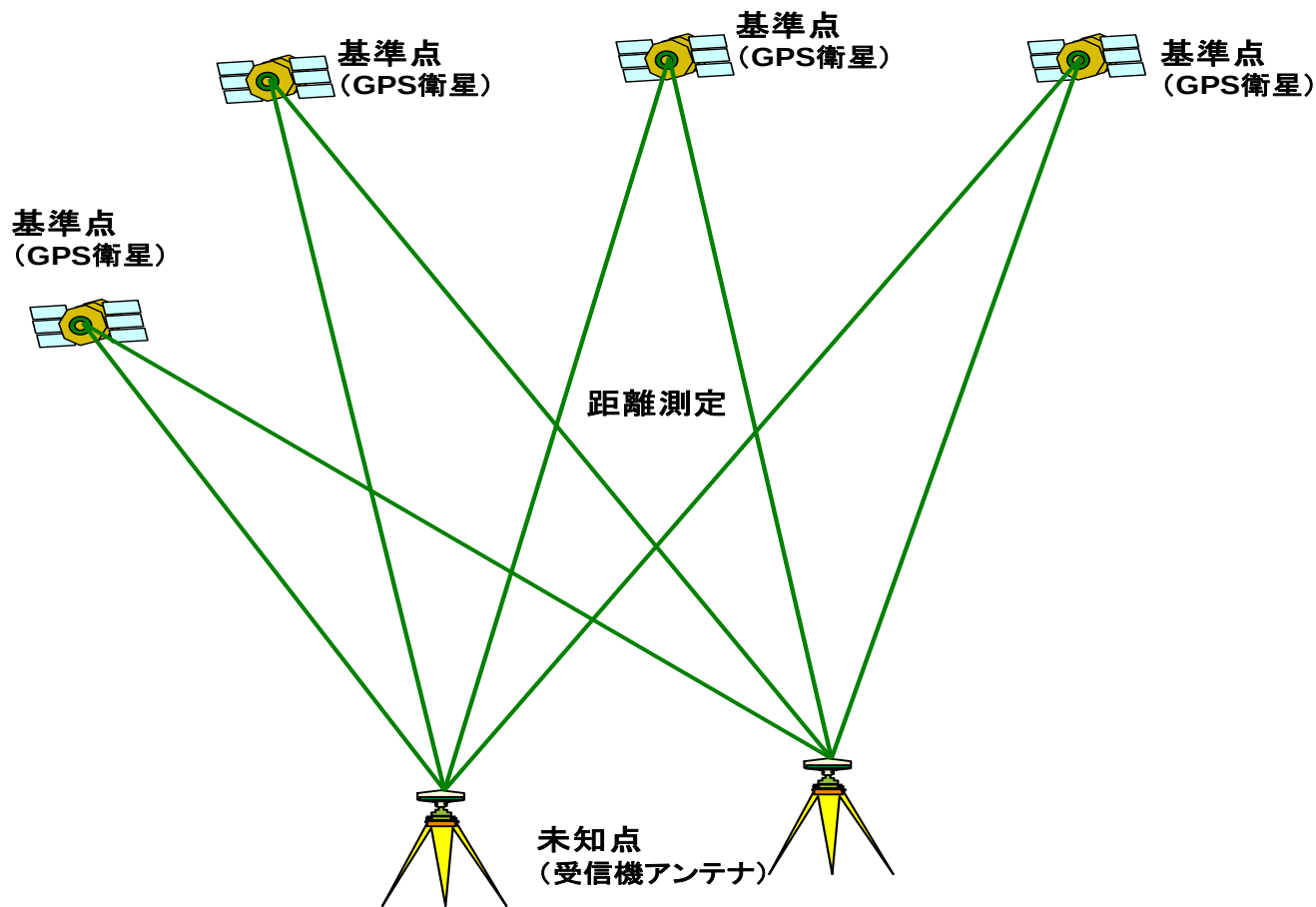


コード長 (293m (C/A))

衛星と観測点の間の距離測定



三辺測量では、基準点と未知点との間の距離観測を行い、未知点座標を求める。



GPSによる位置決定

GPS測位は、GPS衛星と受信機との距離を測定する、宇宙空間の壮大な3次元3辺測量である。

Shujiro NISHI

GPSによる位置決定手順

- 衛星と観測点との距離観測（コードor位相）
- 未知量（観測点座標）と観測量（距離）のモデル化
- 観測方程式の作成
- 最小二乗法の適用
- 解（観測点座標）

最小二乗法の手順

観測量と未知量との
関係式を明らかにする。

$$\mathbf{L} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \begin{array}{l} \mathbf{L} : \text{観測量} \\ \mathbf{x} : \text{未知量} \end{array}$$



観測方程式をつくる。

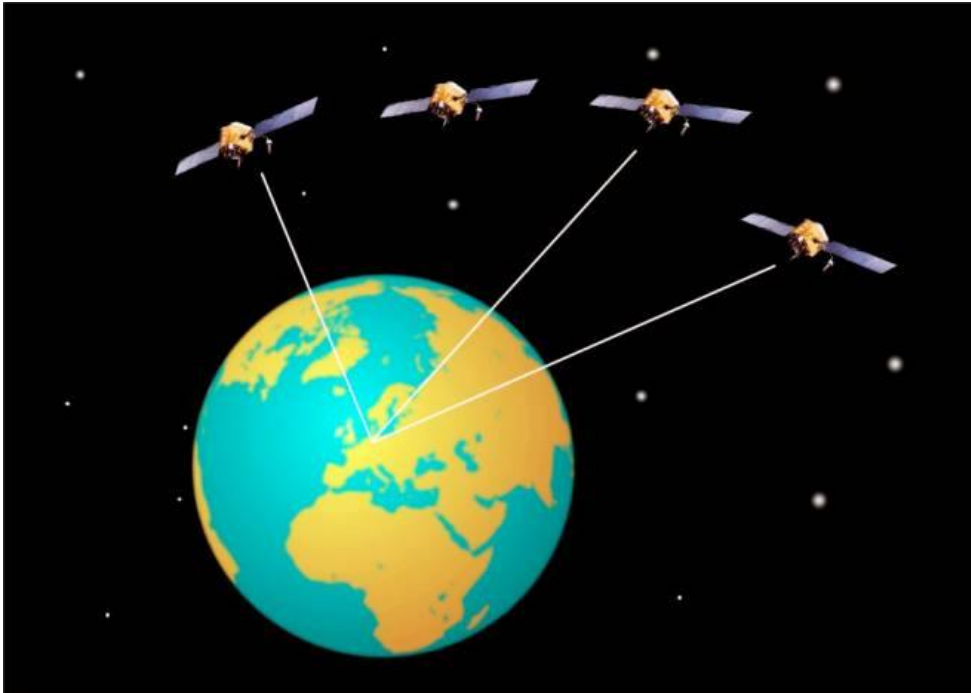
$$\mathbf{v} = \mathbf{Ax} - \mathbf{L}$$



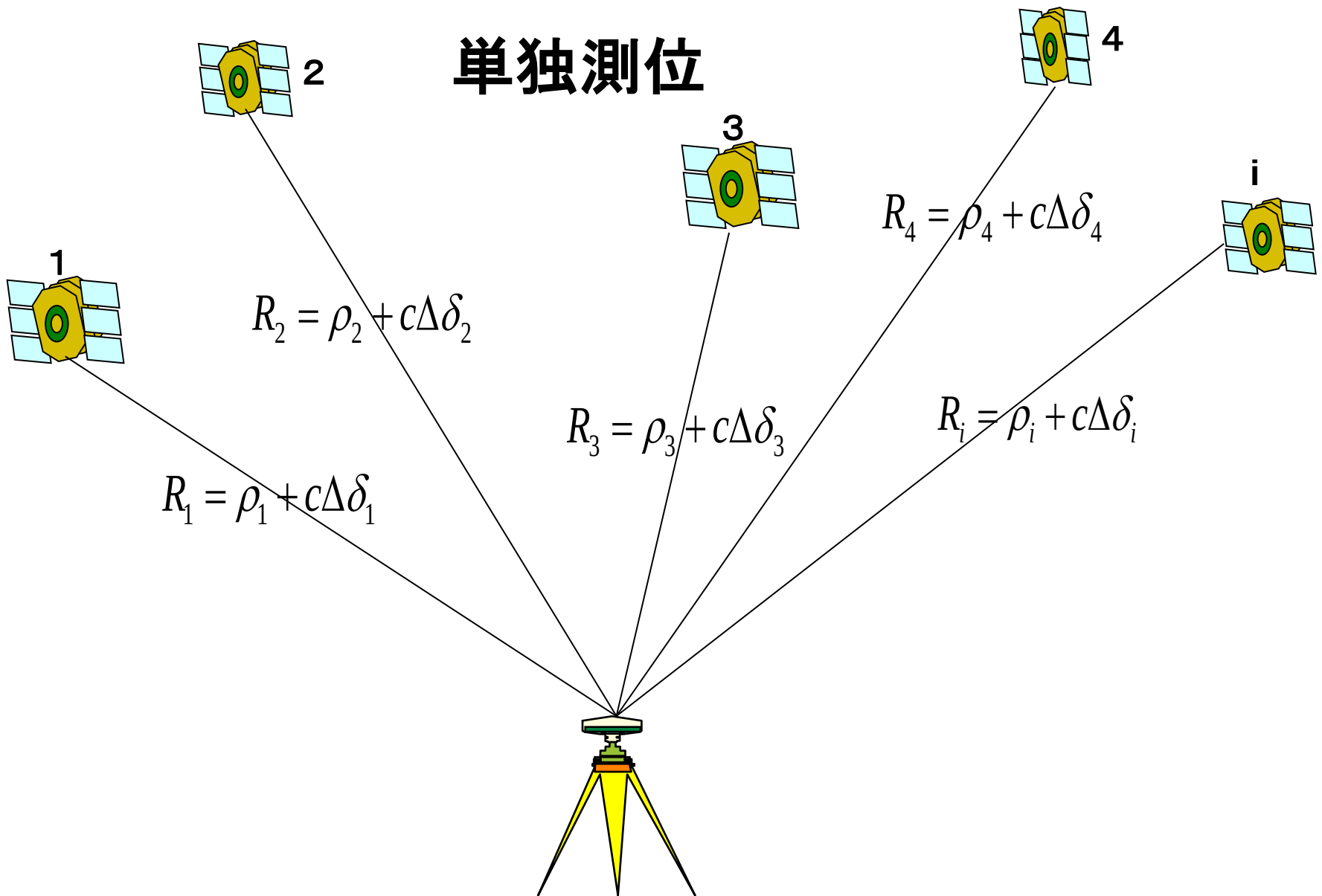
最小二乗解を計算する。

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{PA})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{PL}$$

5-2 コード観測による 位置決定(単独測位)



単独測位



衛星と受信機間のコード擬似距離Rの測定

Shujiro NISHII

単独測位

手順

- コード観測により受信機—衛星間の距離を観測
(4衛星以上の同時観測)
- 航法メッセージの軌道情報、補正量等を使って
原子時計の修正
電離層と対流圏の遅延補正
衛星位置の計算 を行う
- 未知点座標と受信機時計誤差を最小二乗法で解く

コード観測の式

$$R_1(t) = \sqrt{(X_1(t) - X)^2 + (Y_1(t) - Y)^2 + (Z_1(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta_1(t))$$

$$R_2(t) = \sqrt{(X_2(t) - X)^2 + (Y_2(t) - Y)^2 + (Z_2(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta_2(t))$$

$$R_3(t) = \sqrt{(X_3(t) - X)^2 + (Y_3(t) - Y)^2 + (Z_3(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta_3(t))$$

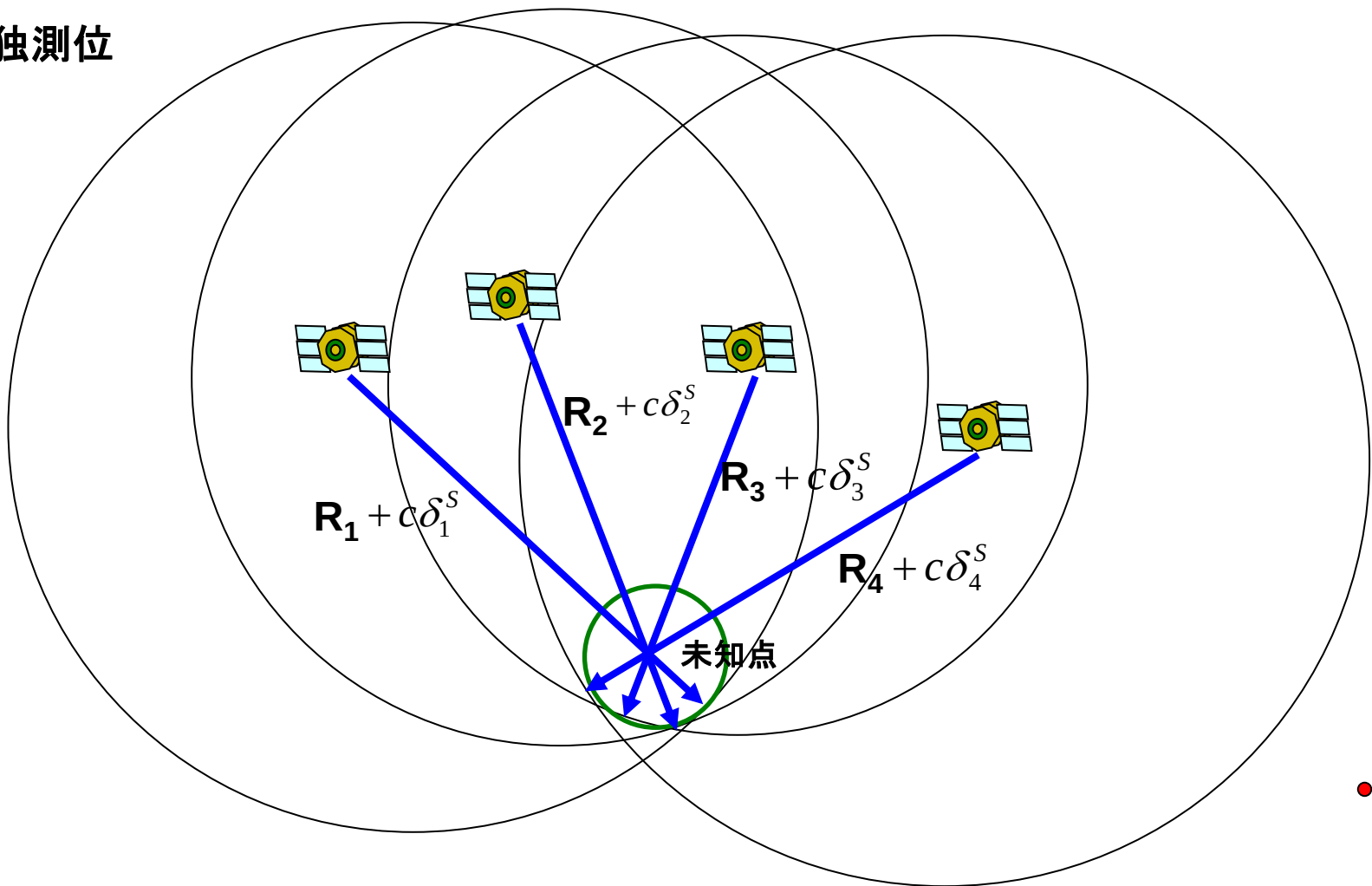
$$R_4(t) = \sqrt{(X_4(t) - X)^2 + (Y_4(t) - Y)^2 + (Z_4(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta_4(t))$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$R_i(t) = \sqrt{(X_i(t) - X)^2 + (Y_i(t) - Y)^2 + (Z_i(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta_i(t))$$

未知量は受信機位置 (X, Y, Z) と受信機時計誤差 $\delta(t)$ の4つであるから、コード観測式は4つあれば解ける。
それ以上の観測がある場合は最小二乗法で求める。

単独測位



幾何学的には、未知点の位置は各衛星を中心とした半径 $R_i + c\delta_i^s$ ($i = 1, 2, 3, 4$) の球に内接する小球の中心位置として求まる。
この小球の半径は受信機時計誤差に電波の速度をかけた $c\delta_R$ である。

コード観測式の線形化 I

$$R^i(t) = \sqrt{(X^i(t) - X)^2 + (Y^i(t) - Y)^2 + (Z^i(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta^i(t))$$

このモデル式を線形にするため、未知量である受信機の位置座標を概略値とその補正量に、また擬似距離を観測値とその残差にそれぞれ分ける。すなわち

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$Y = Y_0 + \Delta Y \quad R^i(t) = R_b^i(t) + v^i$$

$$Z = Z_0 + \Delta Z$$

未知量である受信機時計誤差は既に線形になっているためそのまま使う。

コード観測式の線形化 II

衛星*i*と受信機間の距離を

$$\begin{aligned}\rho^i(t) &= \sqrt{(X^i(t) - X)^2 + (Y^i(t) - Y)^2 + (Z^i(t) - Z)^2} \\ &\equiv f(X, Y, Z)\end{aligned}$$

と置くと、観測方程式は

$$R_b^i(t) + v^i = f(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z) + c(\delta(t) - \delta^i(t))$$

と書ける。

コード観測式の線形化Ⅲ

$f(X, Y, Z)$ を概略値を中心として級数展開し、線形化する

$$\begin{aligned} f(X, Y, Z) &\equiv f(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z) \\ &= f(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial X} \Big|_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \cdot \Delta X \\ &\quad + \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial Y} \Big|_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \cdot \Delta Y + \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial Z} \Big|_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \cdot \Delta Z + \dots \end{aligned}$$

コード観測式の線形化Ⅳ

この係数の部分は例えば

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial f(X, Y, Z)}{\partial X} \right|_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial X} \sqrt{(X^i(t) - X)^2 + (Y^i(t) - Y)^2 + (Z^i(t) - Z)^2} \right)_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \\
 &= \left(\frac{1}{2\sqrt{(X^i(t) - X)^2 + (Y^i(t) - Y)^2 + (Z^i(t) - Z)^2}} \cdot 2(X^i(t) - X) \cdot (-1) \right)_{X=X_0, Y=Y_0, Z=Z_0} \\
 &= \frac{-(X^i(t) - X_0)}{\sqrt{(X^i(t) - X_0)^2 + (Y^i(t) - Y_0)^2 + (Z^i(t) - Z_0)^2}} = \frac{-(X^i(t) - X_0)}{\rho_0^i(t)}
 \end{aligned}$$

であるから

コード観測式の線形化 V

線形化された距離は

$$f(X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z) \\ = \rho_0^i(t)$$

$$-\frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \Delta X - \frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Y - \frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Z$$

となる。

ここで

$$\rho_0^i(t) \equiv f(X_0, Y_0, Z_0) = \sqrt{(X^i(t) - X_0)^2 + (Y^i(t) - Y_0)^2 + (Z^i(t) - Z_0)^2}$$

コード観測式の線形化VI

これから

$$R_b^i(t) + v^i =$$

$$\rho_0^i(t) - \frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \Delta X - \frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Y - \frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Z$$

$$+ c(\delta(t) - \delta^i(t))$$

となる。これを並べ替えると観測方程式は

$$v^i = -\frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \Delta X - \frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Y - \frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Z + c\delta(t) - (R_b^i(t) - \rho_0^i(t) + c\delta^i(t))$$

と書ける

コード観測式の線形化Ⅶ

ここで次の簡略表記を使うと

$$a_X^i = -\frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \quad a_Y^i = -\frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \quad a_Z^i = -\frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)}$$

$$\ell^i = R_b^i(t) - \rho_0^i(t) + c\delta^i(t)$$

最終的に観測方程式は

$$v^i = a_X^i \Delta X + a_Y^i \Delta Y_i + a_Z^i \Delta Z + c\delta(t) - \ell^i$$

となる

単独測位の観測方程式

従って、i個の衛星すべてのコード距離観測方程式は次のように表せる。

$$v^1 = a_X^1 \Delta X + a_Y^1 \Delta Y + a_Z^1 \Delta Z + c\delta(t) - \ell^1$$

$$v^2 = a_X^2 \Delta X_i + a_Y^2 \Delta Y + a_Z^2 \Delta Z + c\delta(t) - \ell^2$$

.....

$$v^i = a_X^i \Delta X + a_Y^i \Delta Y_i + a_Z^i \Delta Z + c\delta(t) - \ell^i$$

まとめ

単独測位数学モデル(i 番目の衛星)

$$R^i(t) = \sqrt{(X^i(t) - X)^2 + (Y^i(t) - Y)^2 + (Z^i(t) - Z)^2} + c(\delta(t) - \delta^i(t))$$

数学モデルの線形化

$$X = X_0 + \Delta X$$

$$Y = Y_0 + \Delta Y$$

$$Z = Z_0 + \Delta Z$$



$$R^i(t) = R_b^i(t) + v^i$$

観測方程式 (i 番目の衛星)

$$v^i = -\frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \Delta X - \frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Y - \frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)} \Delta Z + c\delta(t) - (R_b^i(t) - \rho_0^i(t) + c\delta^i(t))$$

観測方程式(全衛星)

$$v^1 = a_X^1 \Delta X + a_Y^1 \Delta Y + a_Z^1 \Delta Z + c\delta(t) - \ell^1$$

$$v^2 = a_X^2 \Delta X + a_Y^2 \Delta Y + a_Z^2 \Delta Z + c\delta(t) - \ell^2$$

$$\dots\dots\dots$$
$$v^i = a_X^i \Delta X + a_Y^i \Delta Y + a_Z^i \Delta Z + c\delta(t) - \ell^i$$

ここで

$$a_X^i = -\frac{X^i(t) - X_0}{\rho_0^i(t)} \quad a_Y^i = -\frac{Y^i(t) - Y_0}{\rho_0^i(t)} \quad a_Z^i = -\frac{Z^i(t) - Z_0}{\rho_0^i(t)}$$

$$\ell^i = R_b^i(t) - \rho_0^i(t) + c\delta^i(t)$$

観測方程式 行列表現

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} - \mathbf{L}$$

ここで

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_X^1 & a_Y^1 & a_Z^1 & c \\ a_X^2 & a_Y^2 & a_Z^2 & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_X^i & a_Y^i & a_Z^i & c \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell^1 \\ \ell^2 \\ \vdots \\ \ell^i \end{bmatrix}$$

最小二乗解

観測方程式

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} - \mathbf{L}$$

最小二乗計算

解

$$\Delta \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$$

解の精度

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

DOP(精度低下率) I

単独測位の解の精度は、分散：共分散行列

$$\sum_x = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

で表される。 $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ は衛星の幾何学配置で決まる行列である。

DOP(精度低下率)はこの $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ の対角要素を使って定義される

DOP (精度低下率) II

$$\underline{Q}_X = \begin{bmatrix} q_{XX} & q_{XY} & q_{XZ} & q_X t \\ q_{XY} & q_{YY} & q_{YZ} & q_Y t \\ q_{XZ} & q_{YZ} & q_{ZZ} & q_Z t \\ q_X t & q_Y t & q_Z t & q_{tt} \end{bmatrix}$$

と表せば

DOPが次で定義される。

DOP (精度低下率) III

$$GDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz} + q_{tt}}$$

幾何学的精度低下率

$$PDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}}$$

位置精度低下率

$$TDOP = \sqrt{q_{tt}}$$

時刻精度低下率

$$HDOP = \sqrt{q_{xx} + q_{yy}}$$

水平精度低下率

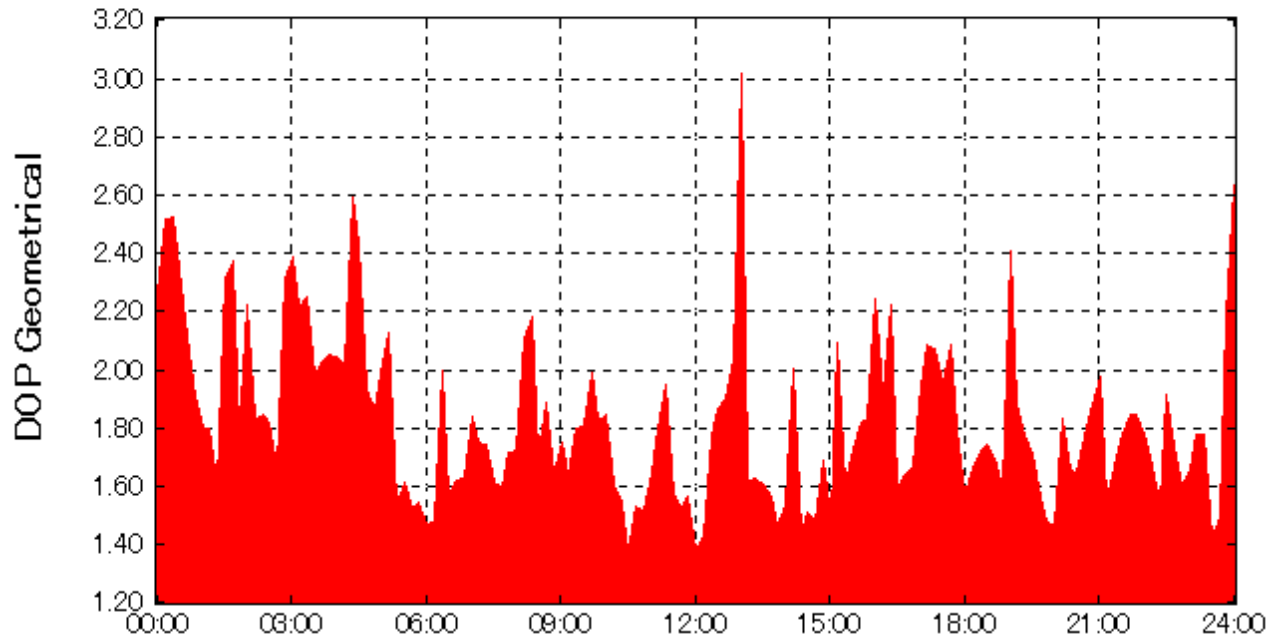
$$VDOP = \sqrt{q_{hh}}$$

垂直精度低下率

DOP(Dilution of Precision)

- GDOPは、観測衛星で形作られる立体の体積に逆比例
- DOPが大きいほど、精度は低下

DOP Geometrical



5-3 位相観測による 位置決定(相対測位)



位相観測による位置決定

ここではその代表的な「スタティックな相対測位」を取り上げる。

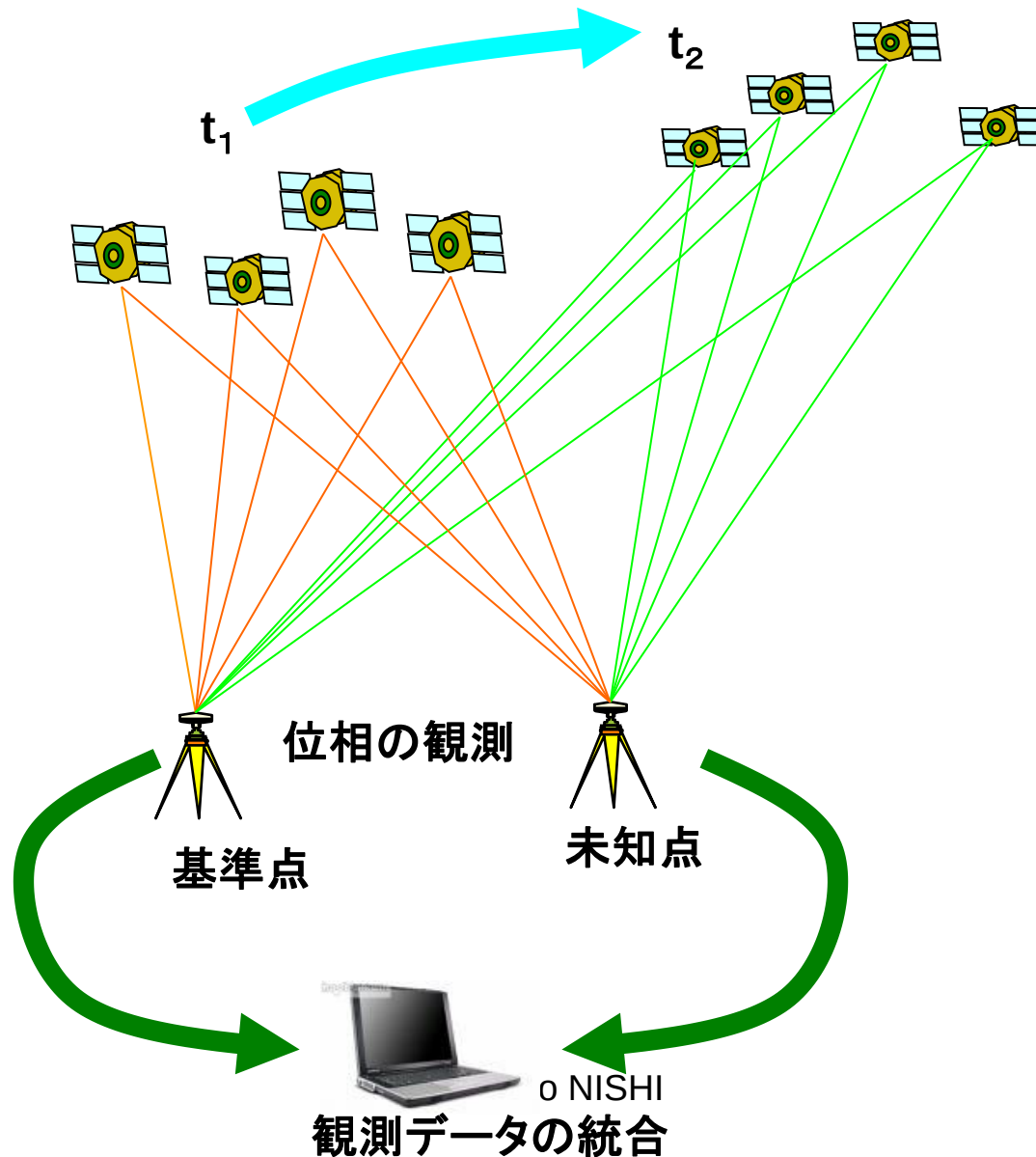
- スタティックな相対測位
- 位相の観測
- 位置の分った基準点と未知点での同時観測

スタティックな相対測位

位置決定の概要

- 基準点と未知点での位相観測
- 観測データの統合
- 二重位相差モデルの採用
- モデルの線形化(観測方程式構築)
- 最小二乗解

スタティックな相対測位

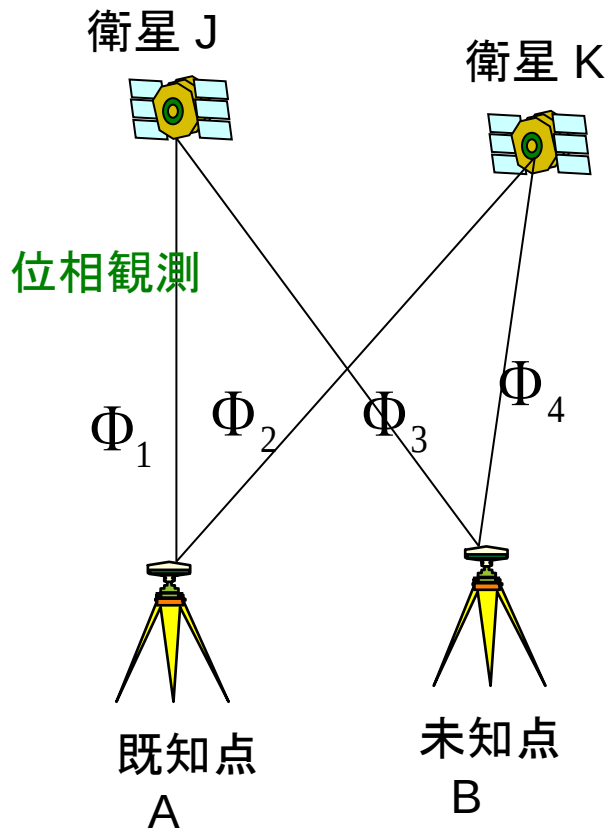


スタティックな相対測位

手順

- 既知点と未知点での同時位相観測.
- 両点のデータを結合して **位相の2重差** を作る(観測方程式)。
- 観測方程式を線形化する。
- 最小二乗計算
- 解(未知点座標)

位相の2重差



定義

double difference $\equiv DD$

$$DD = (\Phi_4 - \Phi_3) - (\Phi_2 - \Phi_1)$$

ここで

$$\Phi_1 = \frac{1}{\lambda} \rho_A^J + \frac{c}{\lambda} (\delta_A - \delta^J) + N_A^J$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\lambda} \rho_A^K + \frac{c}{\lambda} (\delta_A - \delta^K) + N_A^K$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{\lambda} \rho_B^J + \frac{c}{\lambda} (\delta_B - \delta^J) + N_B^J$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{\lambda} \rho_B^K + \frac{c}{\lambda} (\delta_B - \delta^K) + N_B^K$$

位相の2重差モデル

$$DD = (\Phi_4 - \Phi_3) - (\Phi_2 - \Phi_1)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ \rho_B^K(t) - \rho_B^J(t) - \rho_A^K(t) + \rho_A^J(t) \right\} + \left\{ N_B^K - N_B^J - N_A^K + N_A^J \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ \rho_B^K(t) - \rho_B^J(t) - \rho_A^K(t) + \rho_A^J(t) \right\} + N_{AB}^{KJ}$$

位相の2重差をとることで、衛星時計誤差と受信機時計誤差が式から消去できる。

位相の2重差モデル

$$DD \equiv \Phi_{AB}^{KJ}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^{KJ} &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \rho_B^K(t) - \rho_B^J(t) - \rho_A^K(t) + \rho_A^J(t) \right\} + N_{AB}^{KJ} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{(x^K - x_B)^2 + (y^K - y_B)^2 + (z^K - z_B)^2} - \rho_A^K(t) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \left\{ \sqrt{(x^J - x_B)^2 + (y^J - y_B)^2 + (z^J - z_B)^2} - \rho_A^J(t) \right\} + N_{AB}^{KJ}\end{aligned}$$

● :観測量

● :未知量

受信機座標

x_B, y_B, z_B

アンビギュイティー

N_{AB}^{JK}

何故2重位相差を作るのか？

- 個々の位相観測式をそのまま使えば、観測方程式の中に衛星時計誤差や受信機時計誤差がそのまま入る。
- 2重位相差モデルを採用すれば、観測方程式の中には、これらの時計誤差は含まれない。
- 従って、2重位相差モデルを解けば、時計誤差があったとしても、その影響をまったく受けない受信機座標が得られることになる。

モデルの線形化

2重位相差モデル

$$\lambda\Phi_{AB}^{JK}(t) = \rho_B^K(t) - \rho_B^J(t) - \rho_A^K(t) + \rho_A^J(t) + \lambda N_{AB}^{JK}$$

$$X_B = X_B^0 + \delta X_B$$

$$Y_B = Y_B^0 + \delta Y_B$$

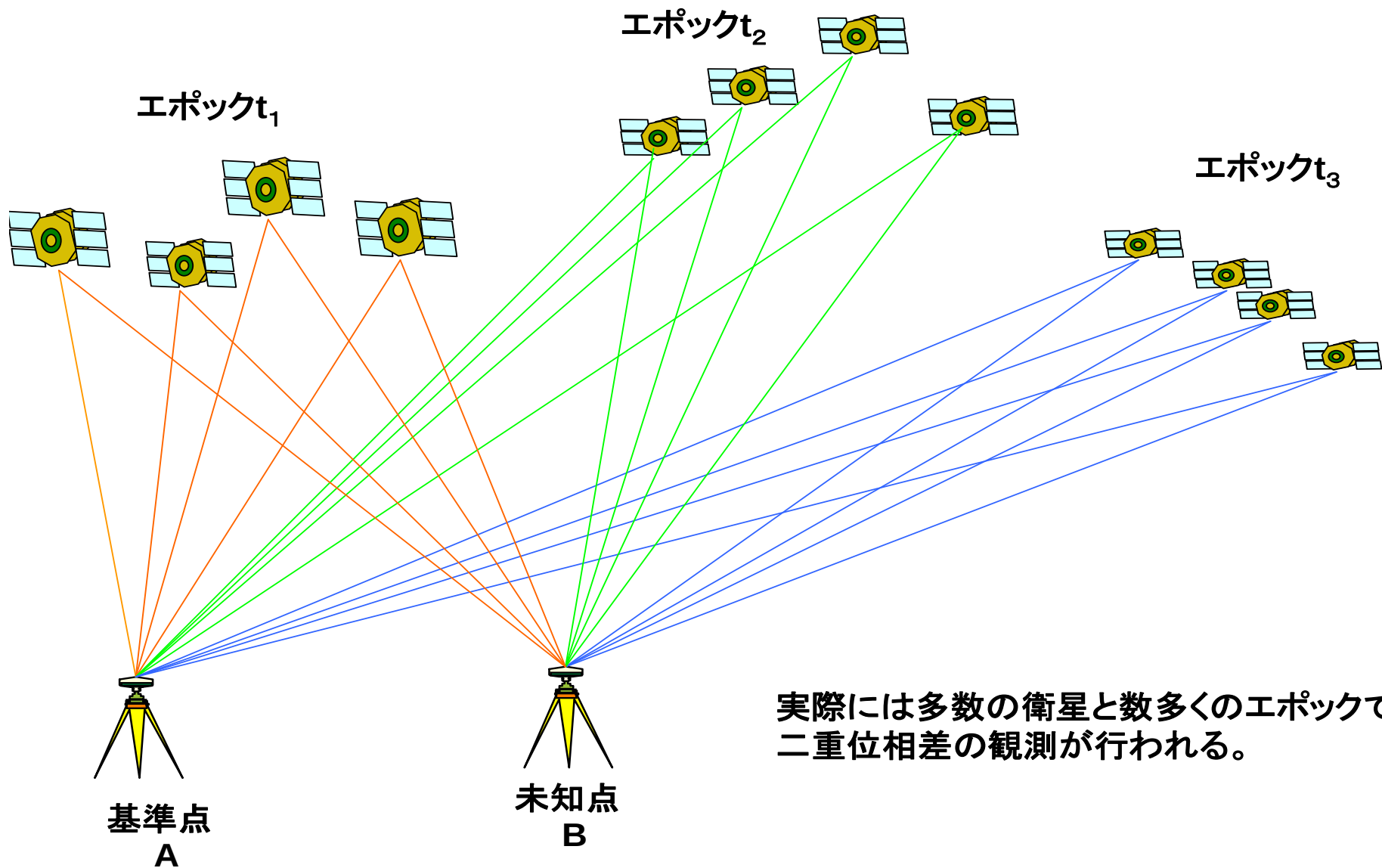
$$Z_B = Z_B^0 + \delta Z_B$$

線形化

$$\lambda\Phi_{AB}^{JK}(t) = \lambda\Phi_{AB}^{JK}(t)_{ob} + v_{AB}^{JK}(t)$$

観測方程式

$$v_{AB}^{JK}(t) = a_{XB}^{JK}(t)\delta X_B + a_{YB}^{JK}(t)\delta Y_B + a_{ZB}^{JK}(t)\delta Z_B + \lambda N_{AB}^{JK} + l_{AB}^{JK}$$



実際には多数の衛星と数多くのエポックで
二重位相差の観測が行われる。

＊

衛星1

衛星2

衛星3

衛星4



既知点A

未知点B

一重差

Φ_A^1

Φ_A^2

Φ_B^4

独立な二重差

$$\Phi_{AB}^{12} = (\Phi_B^2 - \Phi_A^2) - (\Phi_B^1 - \Phi_A^1)$$

$$\Phi_{AB}^{13} = (\Phi_B^3 - \Phi_A^3) - (\Phi_B^1 - \Phi_A^1)$$

$$\Phi_{AB}^{14} = (\Phi_B^4 - \Phi_A^4) - (\Phi_B^1 - \Phi_A^1)$$

独立でない二重差

$$\Phi_{AB}^{23} = (\Phi_B^3 - \Phi_A^3) - (\Phi_B^2 - \Phi_A^2)$$

$$\Phi_{AB}^{24} = (\Phi_B^4 - \Phi_A^4) - (\Phi_B^2 - \Phi_A^2)$$

$$\Phi_{AB}^{34} = (\Phi_B^4 - \Phi_A^4) - (\Phi_B^3 - \Phi_A^3)$$

4衛星1エポックの場合の二重差

Shujiro NISHI

* 4衛星2エポックの二重位相差観測

- 4個の衛星を未知点、既知点で観測
- 1エポックの観測で3つの独立な二重位相差の観測量が得られる。
- 未知量は、未知点の座標3成分と独立な二重差の3つのアンビギュイティーの計6個
- それ故この場合最低2エポック以上の観測があれば未知量が求まる。(観測量 $\geq$ 未知量)

4衛星3エポックの場合の観測方程式 I

このような観測方程式は二重位相差の観測毎に作ることが出来る。

例として4衛星 j, k, l, m をエポック t_1, t_2, t_3 に観測した場合の

二重位相差観測方程式を示す。 4衛星 j, k, l, m に対する二重位相差の観測はエポック毎に3個ずつできる。 すなわちエポック t では

$$v_{AB}^{jk}(t) = a_{XB}^{jk}(t)\delta X_B + a_{YB}^{jk}(t)\delta Y_B + a_{ZB}^{jk}(t)\delta Z_B + \lambda N_{AB}^{jk} + l_{AB}^{jk}$$

$$v_{AB}^{jl}(t) = a_{XB}^{jl}(t)\delta X_B + a_{YB}^{jl}(t)\delta Y_B + a_{ZB}^{jl}(t)\delta Z_B + \lambda N_{AB}^{jl} + l_{AB}^{jl}$$

$$v_{AB}^{jm}(t) = a_{XB}^{jm}(t)\delta X_B + a_{YB}^{jm}(t)\delta Y_B + a_{ZB}^{jm}(t)\delta Z_B + \lambda N_{AB}^{jm} + l_{AB}^{jm}$$

である。 3つのエポックではこれを3つ並べた形の観測方程式になる。

4衛星3エポックの場合の観測方程式Ⅱ

行列表示

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} - \mathbf{L}$$

$$\begin{bmatrix} v_{AB}^{jk}(t_1) \\ v_{AB}^{jl}(t_1) \\ v_{AB}^{jm}(t_1) \\ v_{AB}^{jk}(t_2) \\ v_{AB}^{jl}(t_2) \\ v_{AB}^{jm}(t_2) \\ v_{AB}^{jk}(t_3) \\ v_{AB}^{jl}(t_3) \\ v_{AB}^{jm}(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{XB}^{jk}(t_1) & a_{YB}^{jk}(t_1) & a_{ZB}^{jk}(t_1) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_1) & a_{YB}^{jl}(t_1) & a_{ZB}^{jl}(t_1) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_1) & a_{YB}^{jm}(t_1) & a_{ZB}^{jm}(t_1) & 0 & 0 & \lambda \\ a_{XB}^{jk}(t_2) & a_{YB}^{jk}(t_2) & a_{ZB}^{jk}(t_2) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_2) & a_{YB}^{jl}(t_2) & a_{ZB}^{jl}(t_2) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_2) & a_{YB}^{jm}(t_2) & a_{ZB}^{jm}(t_2) & 0 & 0 & \lambda \\ a_{XB}^{jk}(t_3) & a_{YB}^{jk}(t_3) & a_{ZB}^{jk}(t_3) & \lambda & 0 & 0 \\ a_{XB}^{jl}(t_3) & a_{YB}^{jl}(t_3) & a_{ZB}^{jl}(t_3) & 0 & \lambda & 0 \\ a_{XB}^{jm}(t_3) & a_{YB}^{jm}(t_3) & a_{ZB}^{jm}(t_3) & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta X_B \\ \delta Y_B \\ \delta Z_B \\ N_{AB}^{jk} \\ N_{AB}^{jl} \\ N_{AB}^{jm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{AB}^{jk}(t_1) \\ l_{AB}^{jl}(t_1) \\ l_{AB}^{jm}(t_1) \\ l_{AB}^{jk}(t_2) \\ l_{AB}^{jl}(t_2) \\ l_{AB}^{jm}(t_2) \\ l_{AB}^{jk}(t_3) \\ l_{AB}^{jl}(t_3) \\ l_{AB}^{jm}(t_3) \end{bmatrix}$$

最小二乗解

観測方程式

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{X} - \mathbf{L}$$

最小二乗計算

解

$$\Delta \mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$$

解の精度

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

アンビギュイティーの問題

- 最小二乗解により
未知点の位置座標 と
アンビギュイティー
が求まる。

- 問題

アンビギュイティーは定義から整数でなければならないが、最小二乗解のアンビギュイティーは観測に含まれる様々な誤差の影響で整数値ではなく実数値として推定される。

アンビギュイティーの決定

- 実数値で得られたアンビギュイティーから、本来あるべき整数値のアンビギュイティーを推定しなければならない。
- 同時にこの整数値アンビギュイティーに対応した未知点座標を求め直す必要がある。
- これらの一連の計算をアンビギュイティーの決定と呼んでいる。

フロート解とフィックス解

- フロート解

最初の最小二乗計算で得られる解

(実数値アンビギュイティーに対応する未知点座標)

- フィックス解

アンビギュイティー決定で得られる解

(整数値アンビギュイティーに対応する未知点座標)

アンビギュイティー決定手順

- 第一段階:

可能性のある整数値アンビギュイティーの組み合わせを、ある探索範囲内で作る。

- 第二段階:

一定の判断基準に基づき、正しい整数値アンビギュイティーの組み合わせを選択する。

* 相対測位観測の位置決定手順(まとめ)

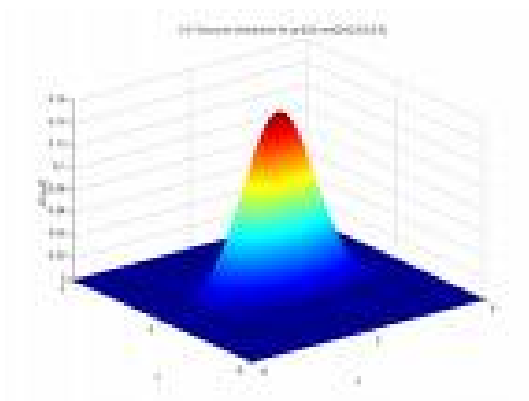
相対測位観測の場合は、基準点と未知点に置かれた受信機で、同時に位相擬似距離観測が行われる。観測された位相データは、受信機からコンピュータにダウンロードされ、計算処理が行われる。

計算には、位相観測値を組み合わせた二重位相差モデルが使われる。このモデルでは、観測に含まれる衛星と受信機時計の誤差が消去でき、電離層、大気圏の影響を小さくすることができる。

計算手順は次の通りである。

まず二重位相差モデルを線形化し、すべての観測方程式を作る。最小二乗法を適用すると、正規方程式が導かれる。この正規方程式を解くと最初の最小二乗解が得られる。この解は、アンビギュイティーが実数として求まるためフロート解と呼ばれる。アンビギュイティーは、整数でなければならないので、最も望ましい整数値のアンビギュイティーの探索がOTF手法等を使って行われる。この整数値アンビギュイティーに対応する最終的な位置座標解は、フィックス解と呼ばれている。

6. GPS の誤差



Shujiro NISHI

GPS測量の系統的誤差

発生源

衛星

信号伝播

受信機

誤差

衛星時計誤差

軌道誤差

電離層遅延

対流圏遅延

アンテナ位相特性

受信機時計誤差

マルチパス

衛星時計誤差

- セシウム原子時計の安定性 10^{-13}
- 2時間では $10^{-13} \cdot 2 \cdot 3600 = 7.2 \cdot 10^{-10} \text{ sec} \cong 20 \text{ cm}$ のドリフト
- このドリフト誤差を補正する係数が放送暦の航法メッセージに含まれている。
- 補正係数 a_0, a_1, a_2
 t_c (基準時刻)
- 補正式 $\delta^s = a_0 + a_1(t - t_c) + a_2(t - t_c)^2$
- 補正式で誤差は数ナノ秒程度になる。

衛星時計誤差の消去

- 単独測位：航法メッセージの係数による補正
- 相対測位：一重差、二重差をとることで消去

軌道誤差

暦	精度	提供	更新間隔
放送暦	1m	即時	4時間毎
精密暦(IGS)			
超速報暦(予報)	5cm	即時	6時間毎
超速報暦(決定)	3cm	3時間後	6時間毎
速報暦	2.5cm	17時間後	1日毎
最終暦	2.5cm	12日後	1週間毎

電離層遅延

- 電離層 (50km～1000km) 屈折で伝播速度が変化するため観測距離に誤差が生じる。
- この誤差 (電離層遅延) は、経路上の自由電子の数と電波の周波数によって変化する。
- 日中の電離層遅延 = 5m～15m
- 夜間の電離層遅延 = 1m～3m

電離層遅延の除去

- 電離層中の自由電子数は不規則に変化するため、モデル化が困難であるが、単独測位用には航法メッセージのなかに簡易補正式(クロバッチャーモデル)が用意されている。これで電離層遅延の約半分程度取り除ける。
- 相対測位の場合は、二重差を採ることで電離層の影響を除去する(短距離の場合)。あるいは、二波長観測を行うことで消去する。

対流圏遅延

- 対流圏(0km～40km)屈折で伝播速度が変化するため観測距離に誤差が生じる。
- この誤差(対流圏遅延)は、経路上の温度、気圧、水蒸気量によって変化する。
- 天頂方向の対流圏遅延はおよそ2m
低高度では20m～30m

対流圏遅延の除去

- 対流圏遅延は、乾燥大気による影響が9割で残りが水蒸気による影響である。
- 乾燥大気はモデル化が容易であるが、水蒸気は分布が不規則でモデル化が困難。
- モデル式による補正

HopfieldモデルやSaastamoinenモデル

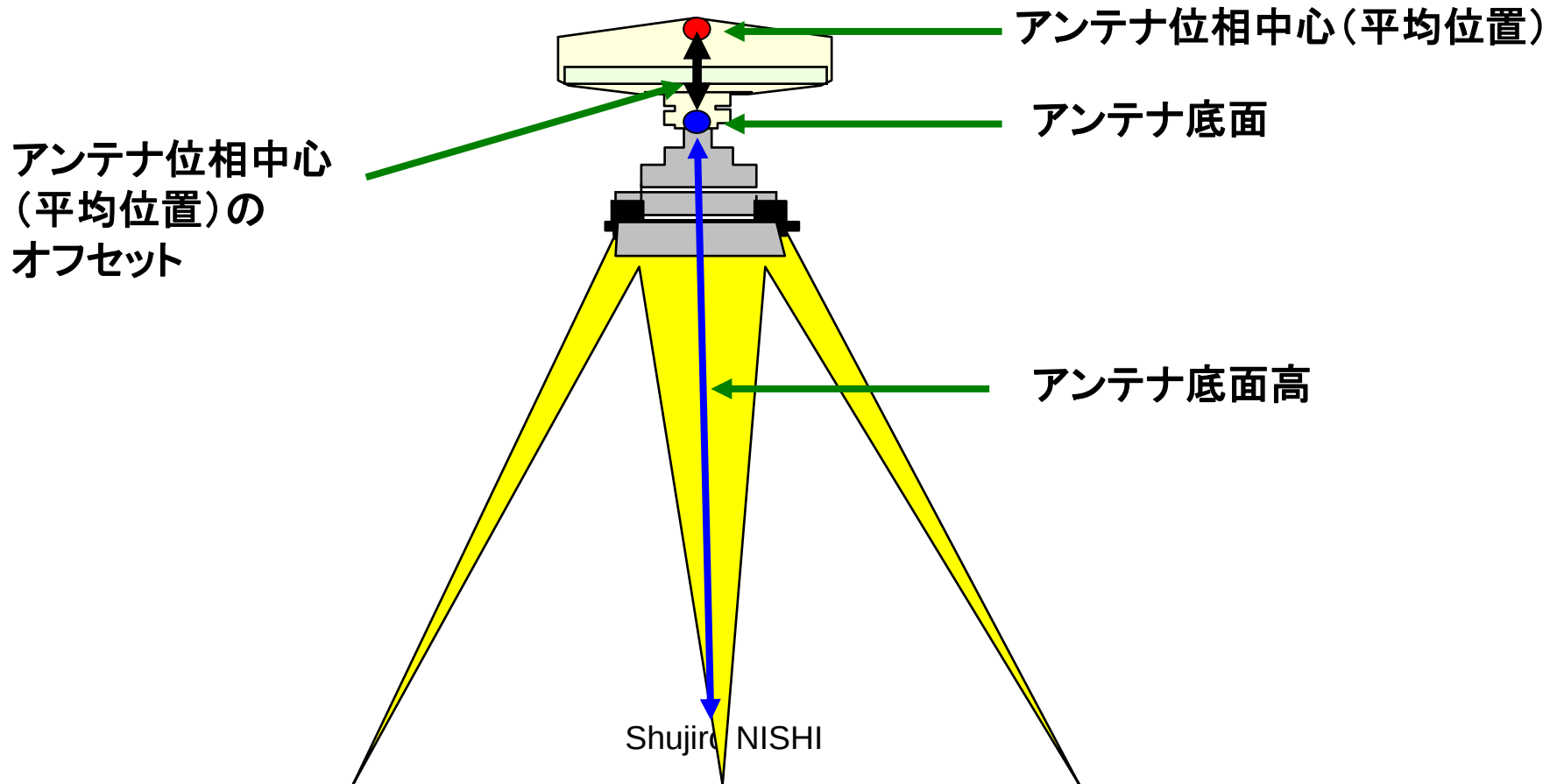
- 相対測位では二重差を採ることにより、対流圏遅延を取り除く(短距離の場合)。

アンテナ位相特性

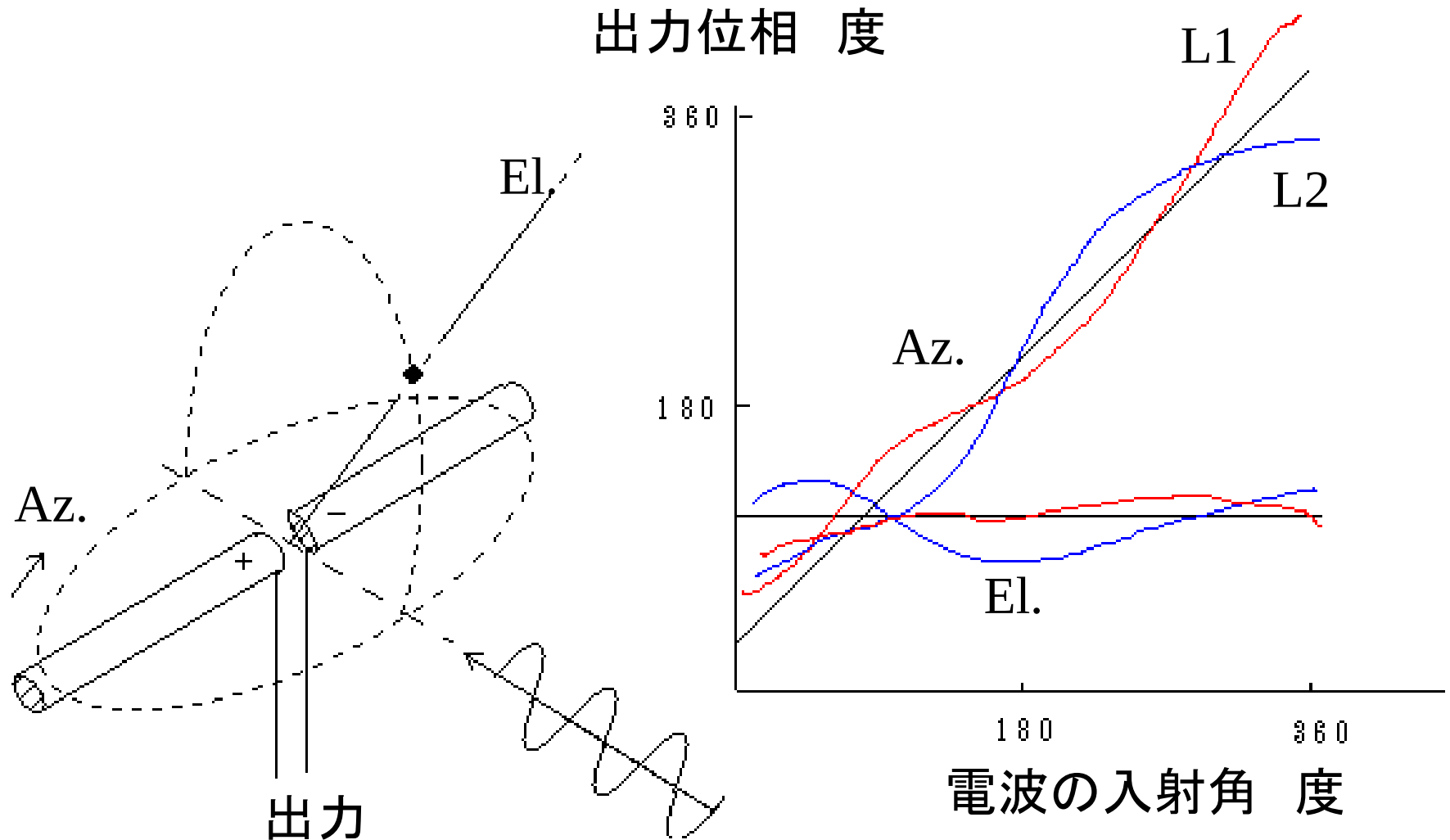
- アンテナの幾何学的中心とアンテナ位相中心（GPS信号の受信点）は異なる。
- アンテナ位相中心は、衛星の高度、方位角によって数センチ変化し、特に高さに影響を与える。
- アンテナ位相中心の変化は、事前のキャリブレーションで把握しておく必要がある。

アンテナ位相特性 $\equiv$ PCV + オフセット

PCV:GPS衛星からの電波の入射角に依存したアンテナ位相中心位置の変動



アンテナの位相特性



PCV補正データ(例)

- TRM23903.00 GSI
- Permanent L1/L2 05/07/01
オフセット (mm)
- 成分 南北 東西 高さ
- L1 1.2 0.4 77.0
- L2 0.5 4.0 75.6

- PCV補正量(高度角 90° ~45°) (mm)
- 高度角 90° 85° 80° 75° 70° 65° 60° 55° 50° 45°
- L1 0.0 4.8 9.3 13.1 16.4 18.8 20.5 21.5 21.7 21.3
- L2 0.0 0.1 0.5 1.1 1.7 2.2 2.7 3.0 3.1 3.0

- PCV補正量(高度角 40° ~ 0°) (mm)
- 高度角 40° 35° 30° 25° 20° 15° 10° 5° 0°
- L1 20.3 18.9 17.2 15.6 14.2 13.4 13.4 0.0 0.0
- L2 2.8 2.4 1.9 1.3 0.8 0.5 0.4 0.0 0.0

アンテナ位相特性の影響除去

- 同一型式アンテナを同一方向に向ける。
- 異機種組合せでは、事前のキャリブレーションから得られるPCV補正を行う。

受信機時計の誤差とその除去

- 受信機の水素時計の精度は、衛星の原子時計に較べてはるかに低い。 10^{-6} のオーダー。
- 単独測位では時計誤差を未知数として推定。
- 相対測位では、二重差モデルを使うことで消去。

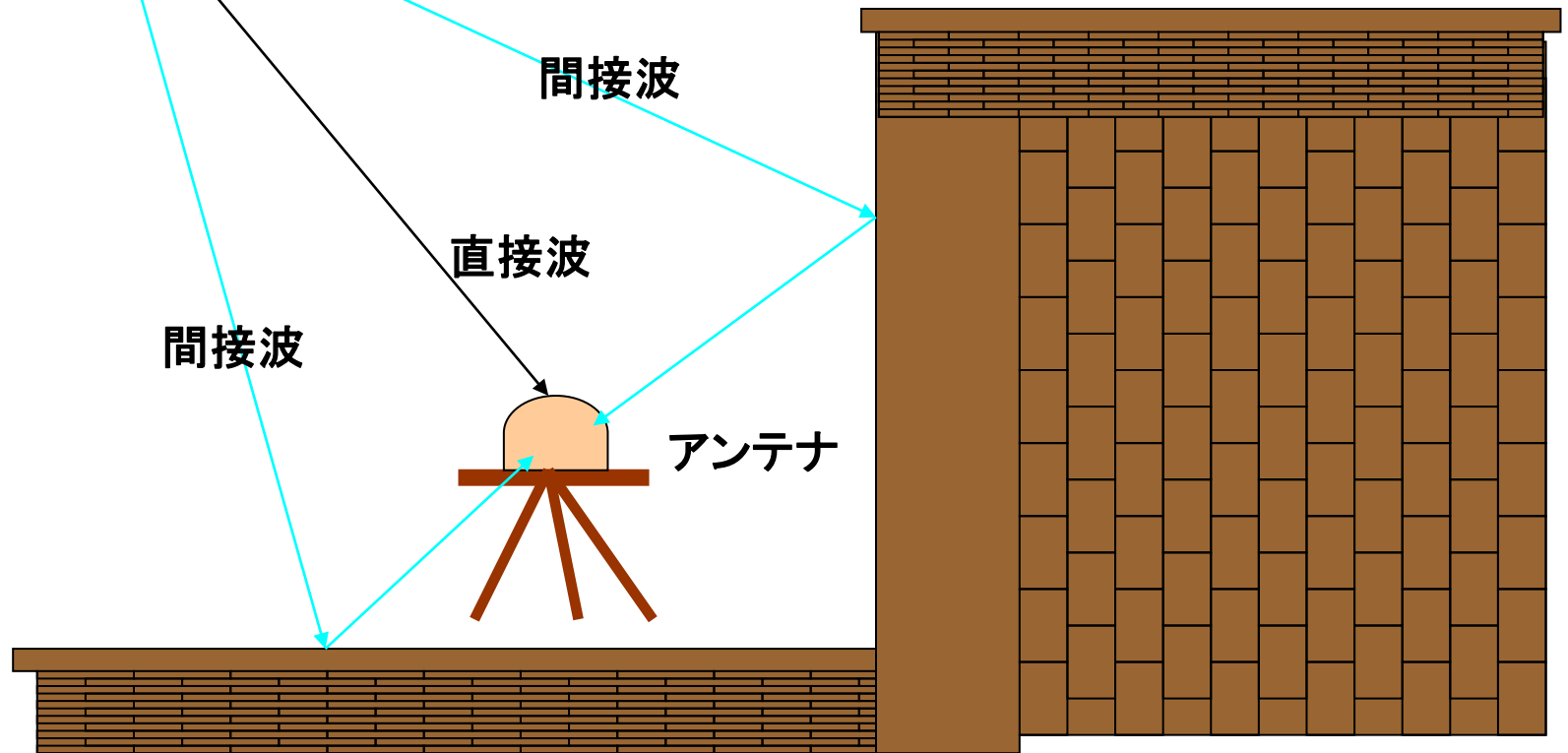
マルチパス

- 衛星からアンテナに直接到達する電波と、アンテナ近傍の物体に反射してからアンテナに到達する電波が干渉することにより、コードと位相の観測に影響を与える。
- 位相の場合最大 90° の誤差。
- 擬似距離の場合は、数mの誤差

マルチパス



衛星



マルチパス(1)

数学モデル

$$a \cos \varphi$$

・・・直接波

$\beta a \cos(\varphi + \Delta\varphi)$. . 間接波($\Delta\varphi$ の位相遅れ)

この干渉は $a \cos \varphi + \beta a \cos(\varphi + \Delta\varphi)$
と表わせる。

マルチパス(2)

干渉波 $a \cos \varphi + \beta a \cos(\varphi + \Delta\varphi)$ を整理すると

$$\beta_M a \cos(\varphi + \Delta\varphi_M)$$

• ここで

$$\beta_M = \sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos \Delta\varphi}$$

$$\tan \Delta\varphi_M = \frac{\beta \sin \Delta\varphi}{1 + \beta \cos \Delta\varphi}$$

はマルチパスの振幅減衰と位相のズレである。

マルチパス(3)

干渉波 $\beta_M a \cos(\varphi + \Delta\varphi_M)$

この式から、マルチパスで測定位相への影響が最も大きくなるのは、 $\Delta\varphi_M = 90^\circ$ の時で、位相のズレを距離に直すと、 $\lambda/4$ (約 5cm) である。

マルチパスの防止・縮小

- アンテナ設置場所の選択： アンテナの近くに例えば金属構造物やフェンス、水面といった反射面を避ける。
- アンテナの選択： チョークリングアンテナや電波吸収素材を使ったグランドプレーンの採用



チョークリングアンテナ

補足： 電離層と対流圏の影響

Shujiro NISHI



電離層 ionosphere

地上およそ50kmから1000kmの範囲は電離層と呼ばれている。ここでは太陽から放射される紫外線やX線が大気分子と衝突することによって分子のイオン化が起きている。イオン化は、マイナスの電荷を持つ自由電子とプラスの電荷を持つ原子、分子を作り出す。電離層はこの自由電子の密度等の違いにより、D層(50ー90km)、E層(90ー140km)、F1層(140ー210km)、F2層(210-1000km)と分けられているが、これらの層の高度や厚さは、太陽からの放射や地球磁場との関係で時々刻々と変化している。

電離層



各層は一定ではなく変化

- ・日変化
- ・季節変化
- ・太陽活動変化(黒点)

電離層を通過する時、
GPS衛星のコード信号は遅れ、
搬送波位相は早くなる。

F2層

210-1000km

F1層

140-210km

D,E層

50-140km

電離層

Shujiro NISHI

電離層による伝播遅延

- 電波が電離層中を通過するとき、自由電子密度に比例して電波の速度が変化する。

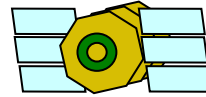
GPSからの電波が受信機に到達するのに遅延が生じる。(電離層遅延)

- 電波の速度には2種類ある。

位相速度 (搬送波位相の伝播速度)

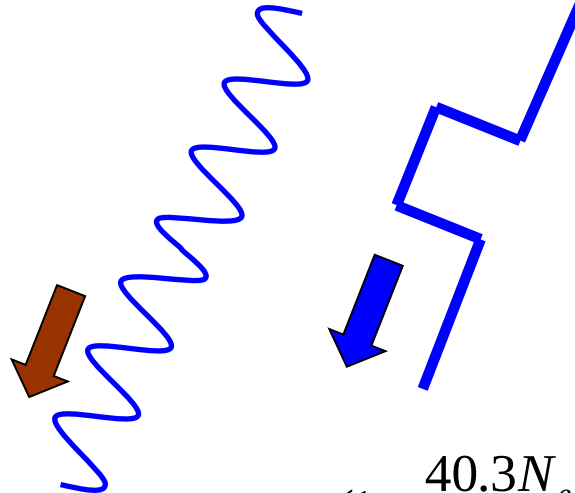
群速度 (コード信号の伝播速度)

位相速度、群速度は、自由電子密度に比例して変化する。



搬送波位相

コード信号



$$v_{ph} = c \left(1 + \frac{40.3 N_e}{f^2} \right)$$

$$v_{gr} = c \left(1 - \frac{40.3 N_e}{f^2} \right)$$

N_e : 自由電子密度

自由電子密度 → 増
位相速度 → 大
位相擬似距離 → 短め

自由電子密度 → 増
群速度 → 小
コード擬似距離 → 長め

電離層屈折一周波数と電子密度に依存

位相屈折率と位相速度

$$n_{ph} = 1 - \frac{40.3N_e}{f^2}$$

$$v_{ph} = c / n_{ph} > c$$

位相速度は進む

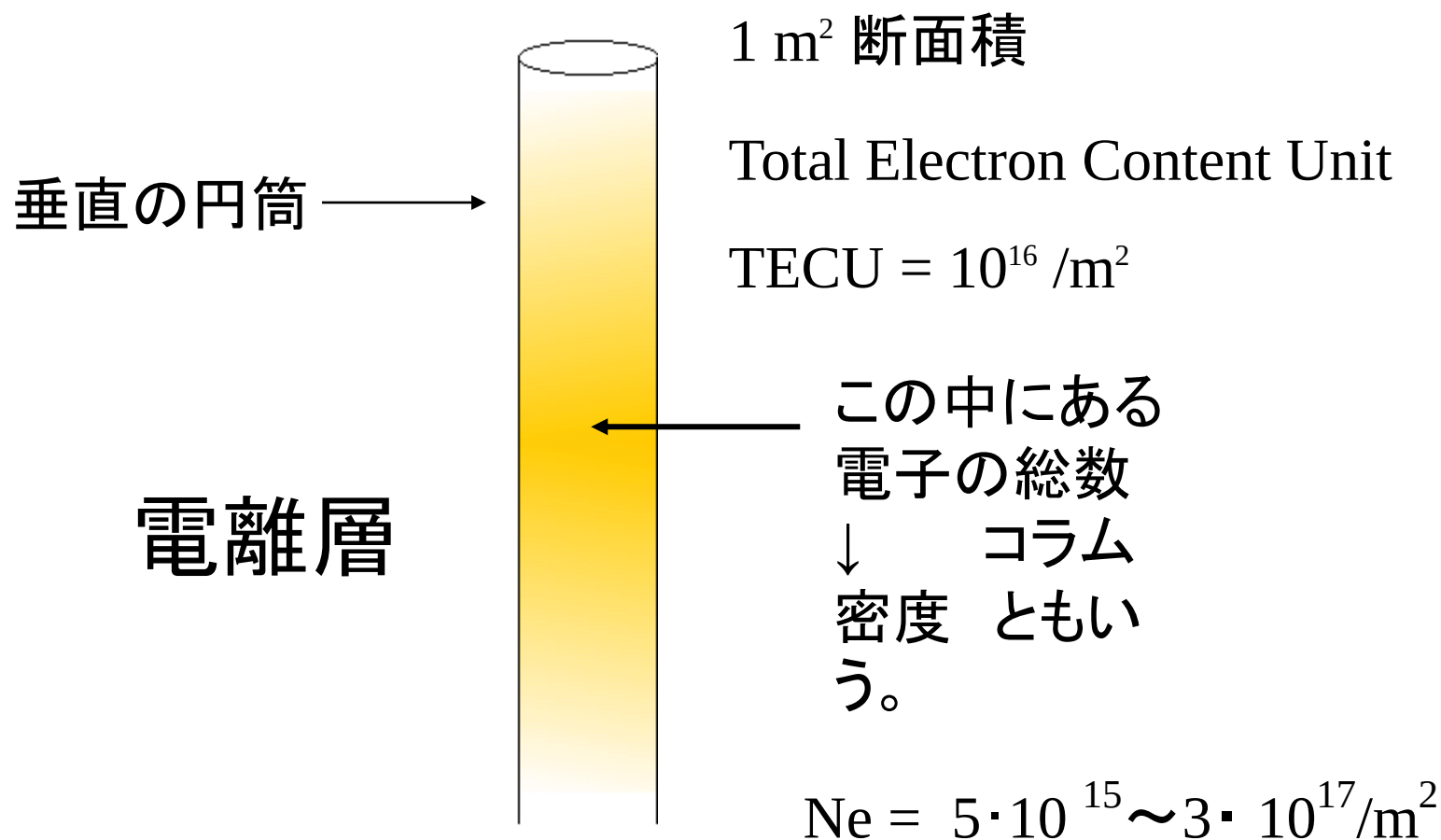
群屈折率と群速度

$$n_{gr} = 1 + \frac{40.3N_e}{f^2}$$

$$v_{gr} = c / n_{gr} < c$$

群速度は遅れる

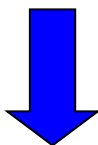
電離層の総電子数



電離層での電波伝播

群信号 (GPSコード信号) は遅れ、位相信号 (GPS搬送波位相) は進むことになる。

コード擬似距離は長めに、
位相擬似距離は短かめに
測定される



電離層遅延誤差

Shujiro NISHI

夜間1～3m、昼間5～15m 程度

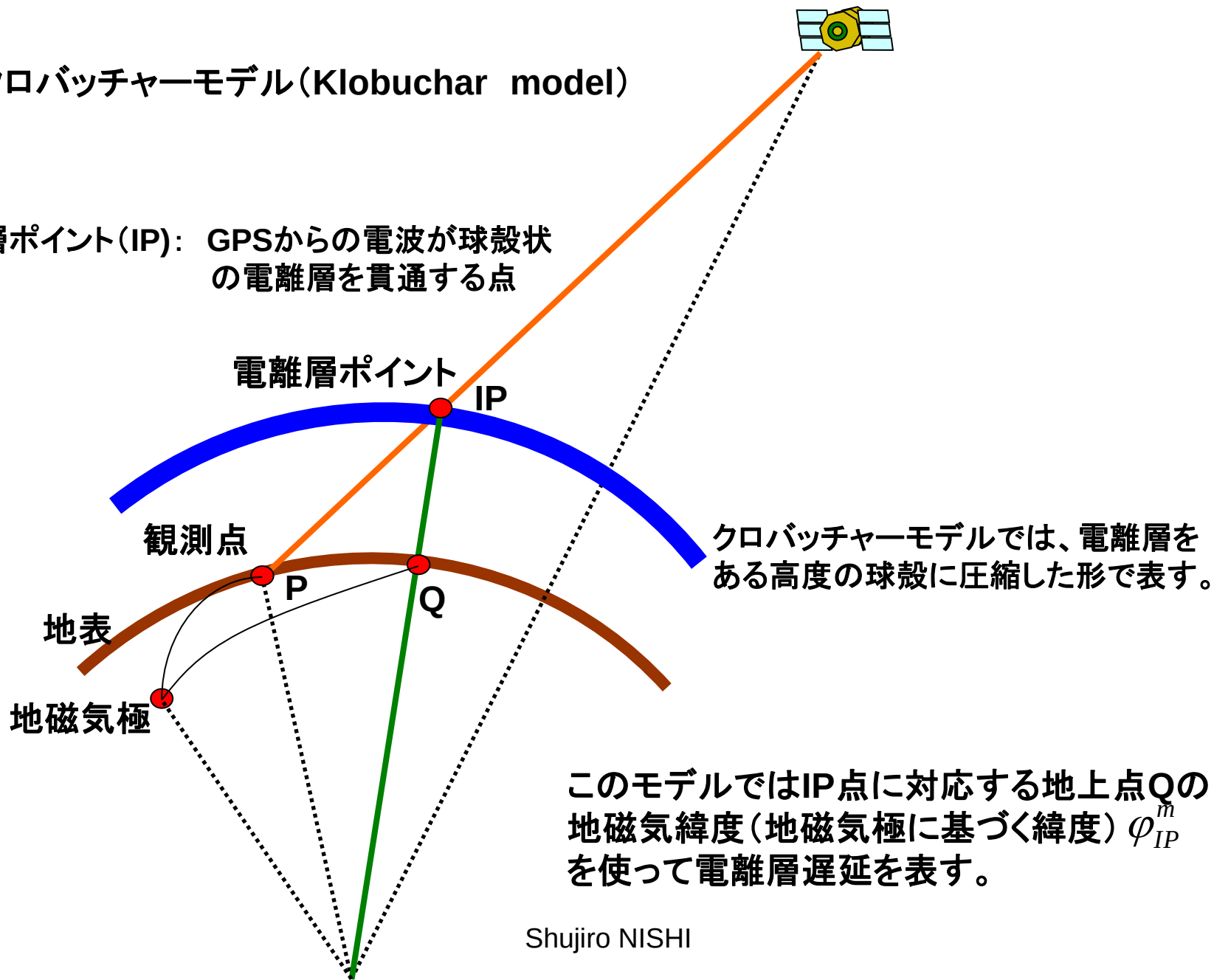
＊

電離層遅延の補正、除去

- 1) 航法メッセージに含まれている補正式を使う。
(クロバッチャーモデル) :これで電離層遅延量の約半分が補正される。 単独測位の場合これで十分。
- 2) 短距離の相対測位の場合、両端点で電離層の影響が同じだと仮定すれば、一重差をとることで電離層の影響が相殺される。
- 3) 長距離の相対測位の場合、二波長で観測することにより電離層遅延を消去する。

クロバッチャーモデル(Klobuchar model)

電離層ポイント(IP): GPSからの電波が球殻状の電離層を貫通する点



(天頂) 電離層遅延 :

$$\Delta T = A_0 + A \cos(2\pi(t - T_0)/T)$$

$$A_0 = 5 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

$$T_0 = 50400 \text{ sec} = 14h$$

$t \equiv$ 観測時 (地方時)

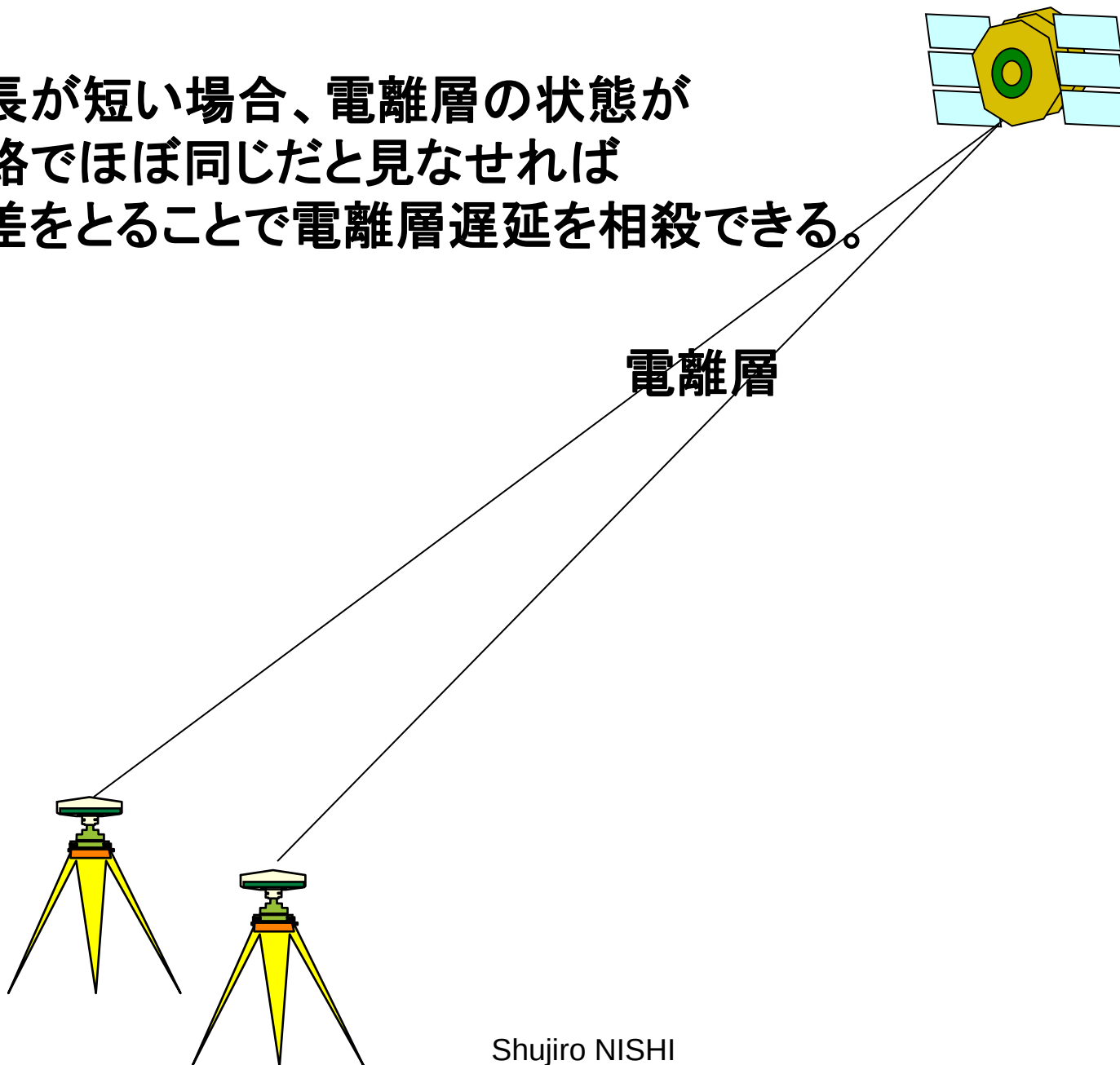
$$A = \sum_{n=0}^3 \alpha_n (\varphi_{IP}^m)^n$$

$$T = \sum_{n=0}^3 \beta_n (\varphi_{IP}^m)^n$$

φ_{IP}^m : IPの地磁気緯度

α_n, β_n : 航法メッセージの中の係数

基線長が短い場合、電離層の状態が
両経路でほぼ同じだと見なせれば
一重差をとることで電離層遅延を相殺できる。



二波長観測による電離層 遅延の消去(1)

位相擬似距離モデルに、周波数依存の電離層屈折の影響を付け加えると、

$$\lambda_1 \Phi_1 = \rho + c\Delta\delta + \lambda_1 N_1 - \Delta^{Iono}(f_1)$$

$$\lambda_2 \Phi_2 = \rho + c\Delta\delta + \lambda_2 N_2 - \Delta^{Iono}(f_2)$$

二波長観測による電離層 遅延の消去(2)

$$\Delta^{Iono}(f) = +\frac{40.3}{f^2} TEC$$

を考慮して両式からTEC(総電子数)を消去
すると 電離層の影響を受けない位相線形結
合が得られる。

$$\left[\Phi_1 - \frac{f_2}{f_1} \Phi_2 \right] = (\rho + c\Delta\delta) \frac{f_1^2 - f_2^2}{cf_1} + \left[N_1 - \frac{f_2}{f_1} N_2 \right]$$

二波長観測による電離層 遅延の消去(3)

ここで、

$$\Phi_1 - \frac{f_2}{f_1} \Phi_2 = \Phi_{IF} \quad \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1} = \frac{1}{\lambda_{IF}} \quad N_1 - \frac{f_2}{f_1} N_2 = N_{IF}$$

と置けば、この式は

$$\Phi_{IF} = \frac{1}{\lambda_{IF}} (\rho + c\Delta\delta) + N_{IF}$$

となる。これを波長 λ_{IF}

搬送波による位相 Φ_{IF} の観測方程式と考えれば、これは電離層の影響を含まない観測方程式になっている。

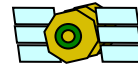
位相のイオンフリー線形結合

L1波とL2波の位相の線形結合のうち次の形は電離層の影響を受けないイオンフリー (ionospheric free) と呼ばれる結合である。

$$\Phi_{IF} = \Phi_1 - \frac{f_1}{f_2} \Phi_2$$

対流圏の影響

- 空気(乾燥空気)と水蒸気が異なる振る舞い。
- 乾燥空気は安定した分布で補正が容易。
- 水蒸気の分布は気象により不安定で、理論的補正が困難。
- しかし電離層のように伝播速度が周波数によって変化し、位相速度、群速度が違ってくるという複雑さはない。



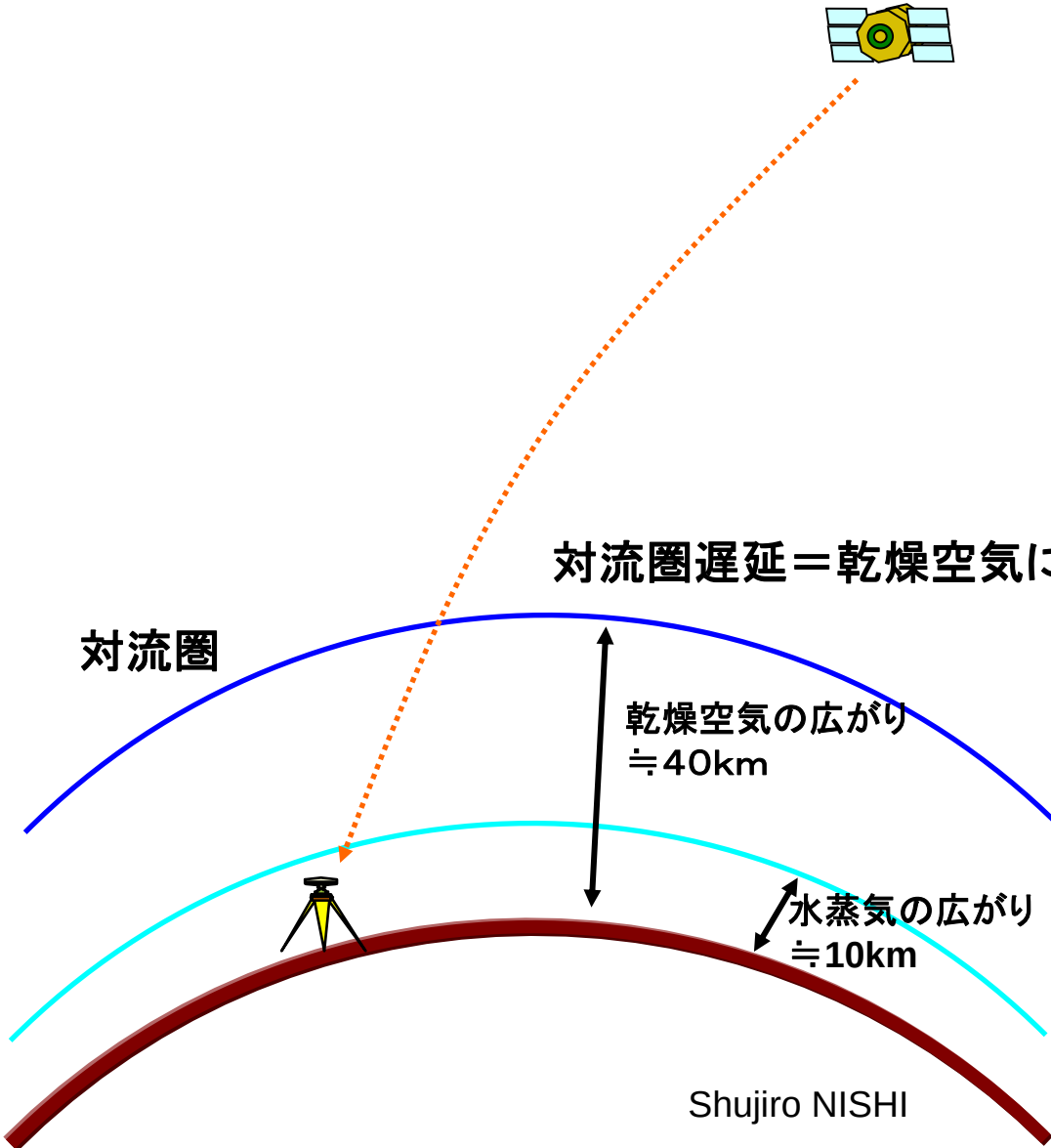
対流圏遅延＝乾燥空気による遅延＋水蒸気による遅延

対流圏

乾燥空気の広がり
≒40km

水蒸気の広がり
≒10km

Shujiro NISHI



対流圏の影響（伝搬遅延）

- 乾燥空気 天頂で 2 m 強
地表気圧にのみ依存→理論補正可能
- 水蒸気 天頂で0.05～0.4 m
理論的予測困難

対流圏遅延の補正、除去

- 1) 標準大気に基づく対流圏遅延
モデル(HopfieldモデルやSaastamoinen
モデル)で補正する。これらは基線解析ソフト
ウェアに組み込まれている。
また一重差をとることによっても相殺される。
- 3) 長距離の基線解析の場合、対流圏遅延量を未知量として推定する学術用ソフトウェアもある。

対流圏屈折

対流圏での経路遅延

n : 屈折率

$N^{Trop} = 10^6 (n - 1)$: 屈折指数 とすると対流圏での経路遅延は

$$\begin{aligned}\Delta^{Trop} &= \int (n - 1) ds = 10^{-6} \int N^{Trop} ds \\ &= 10^{-6} \int N_d^{Trop} ds + 10^{-6} \int N_w^{Trop} ds\end{aligned}$$

- と乾燥(dry)成分と湿潤(wet)成分とに分離できる。

修正Hopfieldモデルでの対流圏遅延式

$$\Delta^{Trop} = 0.002277 \operatorname{cosec}(z) (1 + 0.0026 \cos(2z) + 0.00028H) \left\{ P + \left(\frac{1255}{T} + 0.05 \right) e \right\}$$

で与えられる。 ここで、

H 観測点標高 (m)

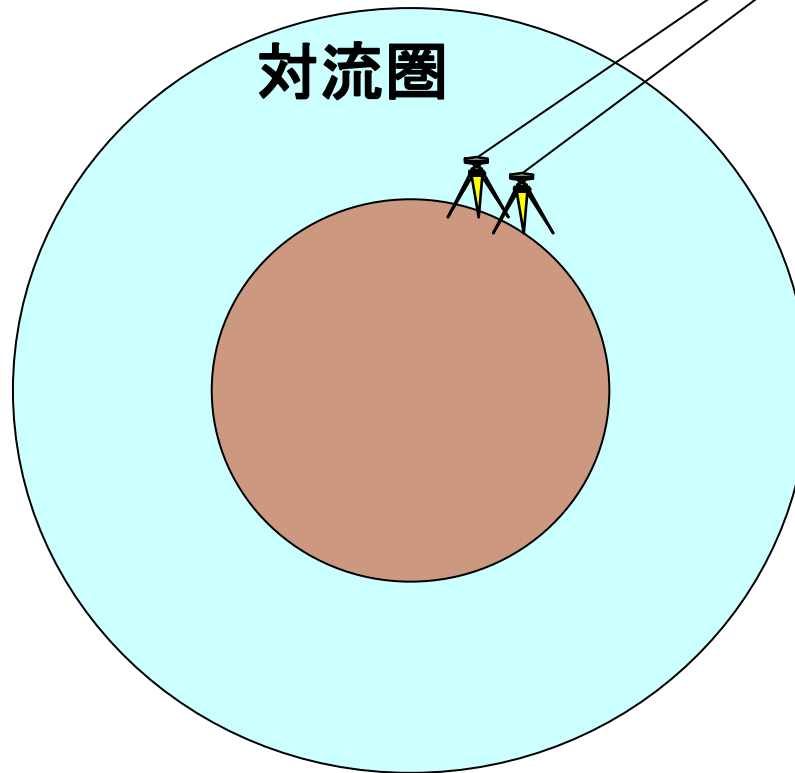
Z GPS衛星の天頂 (度)

P 気圧 (mBar)

T 温度 (° K)

e 水蒸気分圧 (mBar)

基線長が短い場合、対流圏の状態が
両経路でほぼ同じだと見なせれば
一重差をとることで電離層遅延を相殺できる。



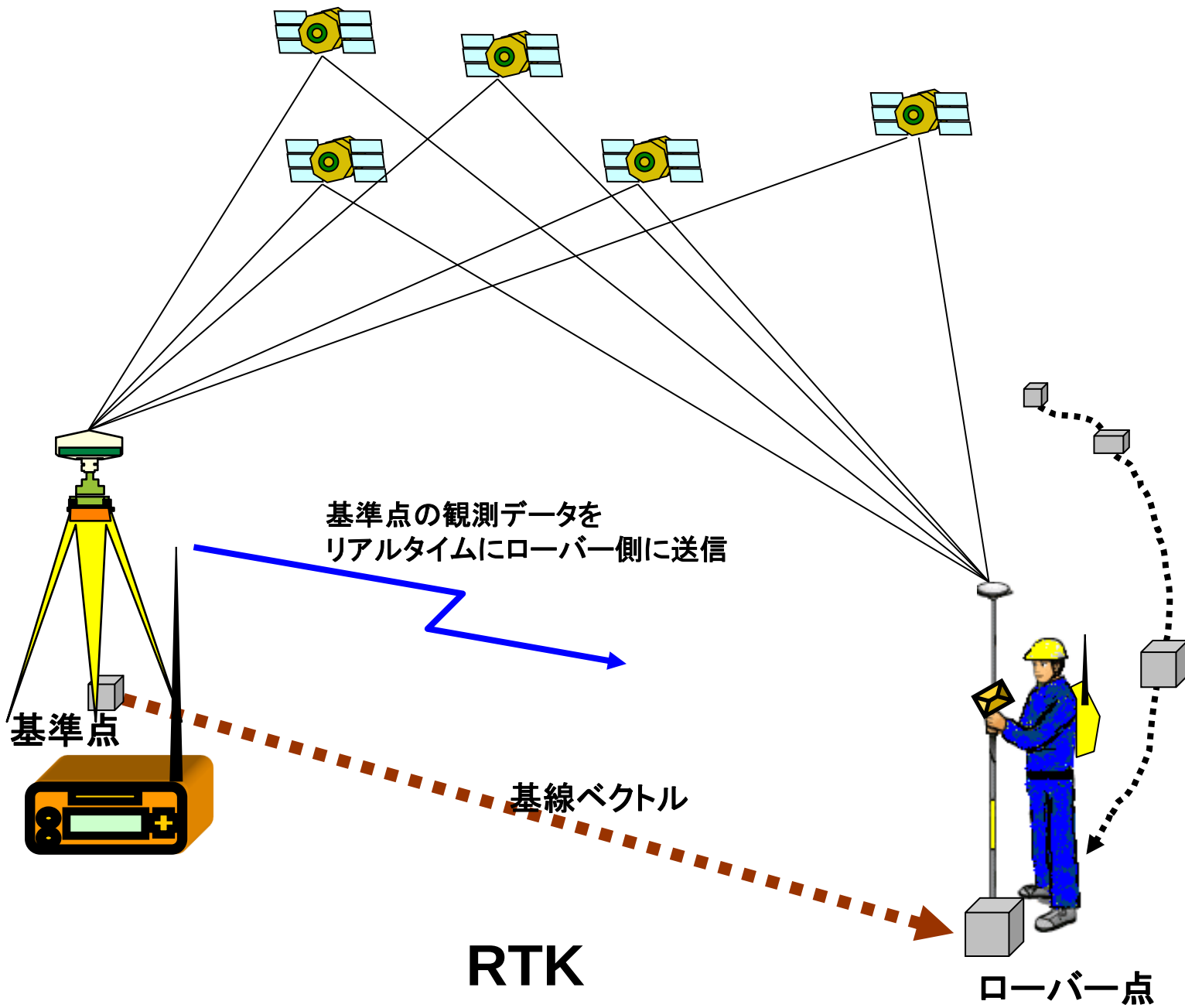
7. リアルタイムGPS



Shujiro NISHI

RTK—GPS

- リアルタイムキネマティック(RTK):
既知点での観測データを未知点で即時処理
既知点—未知点間の通信リンク
瞬時のアンビギュイティー 決定(OTF)
- スタティック:
既知点と未知点の観測データを後処理
長時間の観測でアンビギュイティー 決定



RTK－GPSの特徴と問題

- 「RTK-GPS」は、沢山の未知点を短時間で決定できるという効率性に優れているが、基準点からの距離が10kmを越えると、電離層、対流圏等による誤差が一重差、二重差をとっても相殺できなくなり瞬時に精度良くアンビギュイティーを決定することが難しくなる。
- これを解決したのが、「ネットワーク型RTK-GPS」である。

ネットワーク型RTK-GPS

- 広域でのRTK-GPS測量
- 複数の基準点で電離層、大気圏遅延を補正
- 補正データの処理方法により

VRS

FKP

等の方式がある。

ネットワーク型RTK-GPSの方式

- VRS方式
(開発) Trimble Terrasat
(日本での実用サービス):
ジェノバ、日本GPSデータサービス
- FKP方式
(開発) Geo++社
(日本での実用サービス):
ジェノバ

ネットワーク型RTK-GPSの利点

- 多数の基準点による冗長性
- 参照基準点の準備不要
- 広域(数十km)でcmレベルの測位精度
- 高速、確実な初期化

ネットワーク型RTK-GPSの原理

- 位置が正確に分かっている複数の基準点において、電離層、対流圏等による誤差を分離・推定
- これを使って地域内の任意の場所での誤差を補間で推定
- これを補正量として未知点に送信
- 未知点では、これを使うことで観測値に対する電離層、対流圏等の補正ができるため、数十kmの長基線でもRTKが可能となる

基準点Aにおける衛星の軌道誤差や電離層、対流圏誤差

$$\Delta_r^s(\mathbf{X}_A, t) = \Delta^{Orbit}(\mathbf{X}_A, t) + \Delta^{Iono}(\mathbf{X}_A, t) + \Delta^{Trop}(\mathbf{X}_A, t)$$

を考慮すると、基準点Aと仮想基準点Vでの位相観測値は次のように表せる。

基準点A

$$\Phi_r^s(\mathbf{X}_A, t) = \frac{1}{\lambda^s} \rho_r^s(\mathbf{X}_A, t) + N_r^s + f^s \Delta \delta_r^s(t) + \Delta_r^s(\mathbf{X}_A, t)$$

仮想基準点V

$$\Phi_r^s(\mathbf{X}_V, t) = \frac{1}{\lambda^s} \rho_r^s(\mathbf{X}_V, t) + N_r^s + f^s \Delta \delta_r^s(t) + \Delta_r^s(\mathbf{X}_V, t)$$

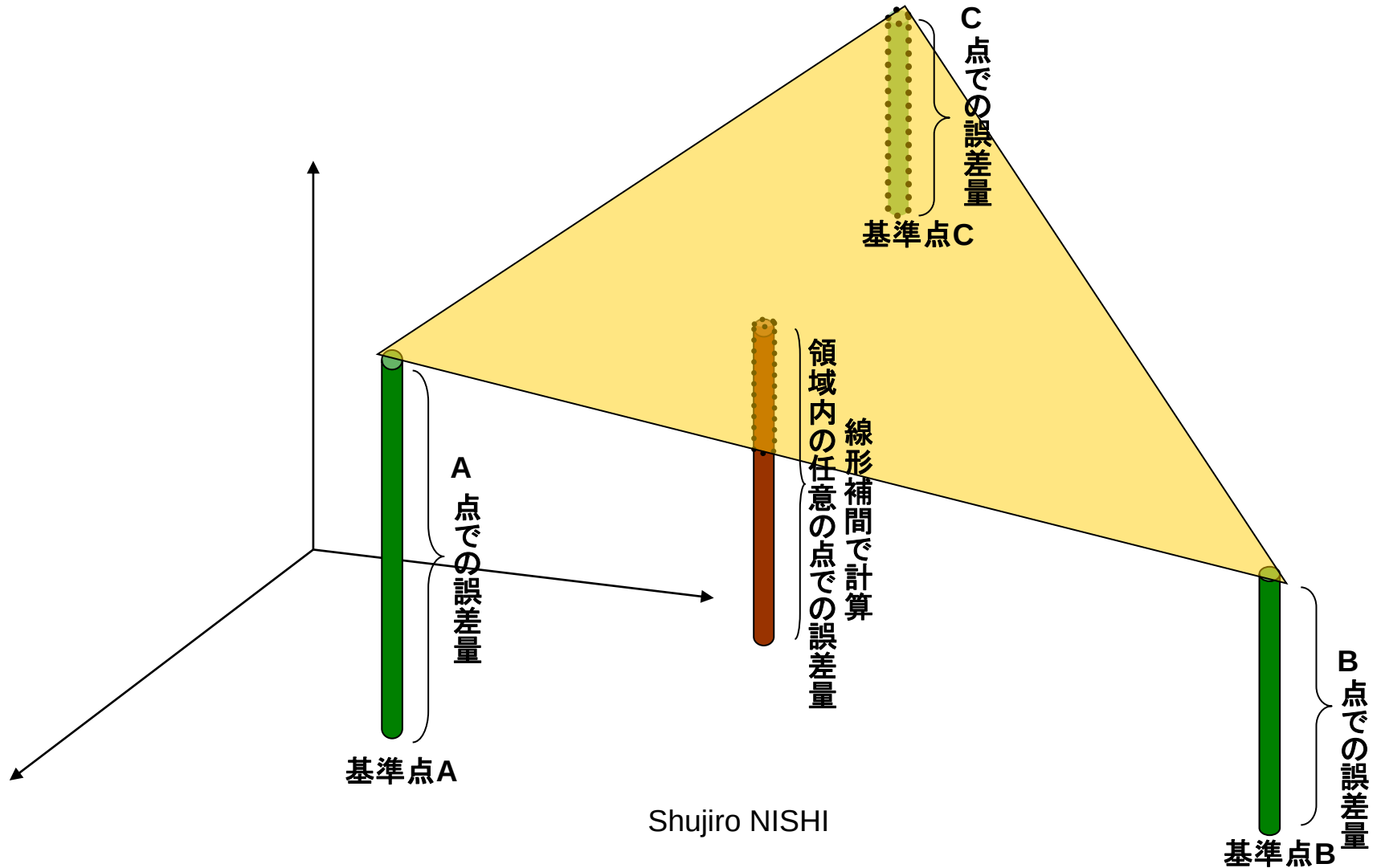
これから、仮想基準点Vでの位相観測値が基準点Aでの位相観測値と $\Delta_r^s(\mathbf{X}_V, t)$ を使って次のように計算できることが分かる。

$\Delta_r^s(\mathbf{X}_V, t)$ は仮想基準点の周りにある基準点での観測値から推定ればよい。

$$\Phi_r^s(\mathbf{X}_V, t) = \Phi_r^s(\mathbf{X}_A, t) + \frac{1}{\lambda^s} \left[\rho_r^s(\mathbf{X}_V, t) - \rho_r^s(\mathbf{X}_A, t) \right] + \Delta_r^s(\mathbf{X}_V, t)$$

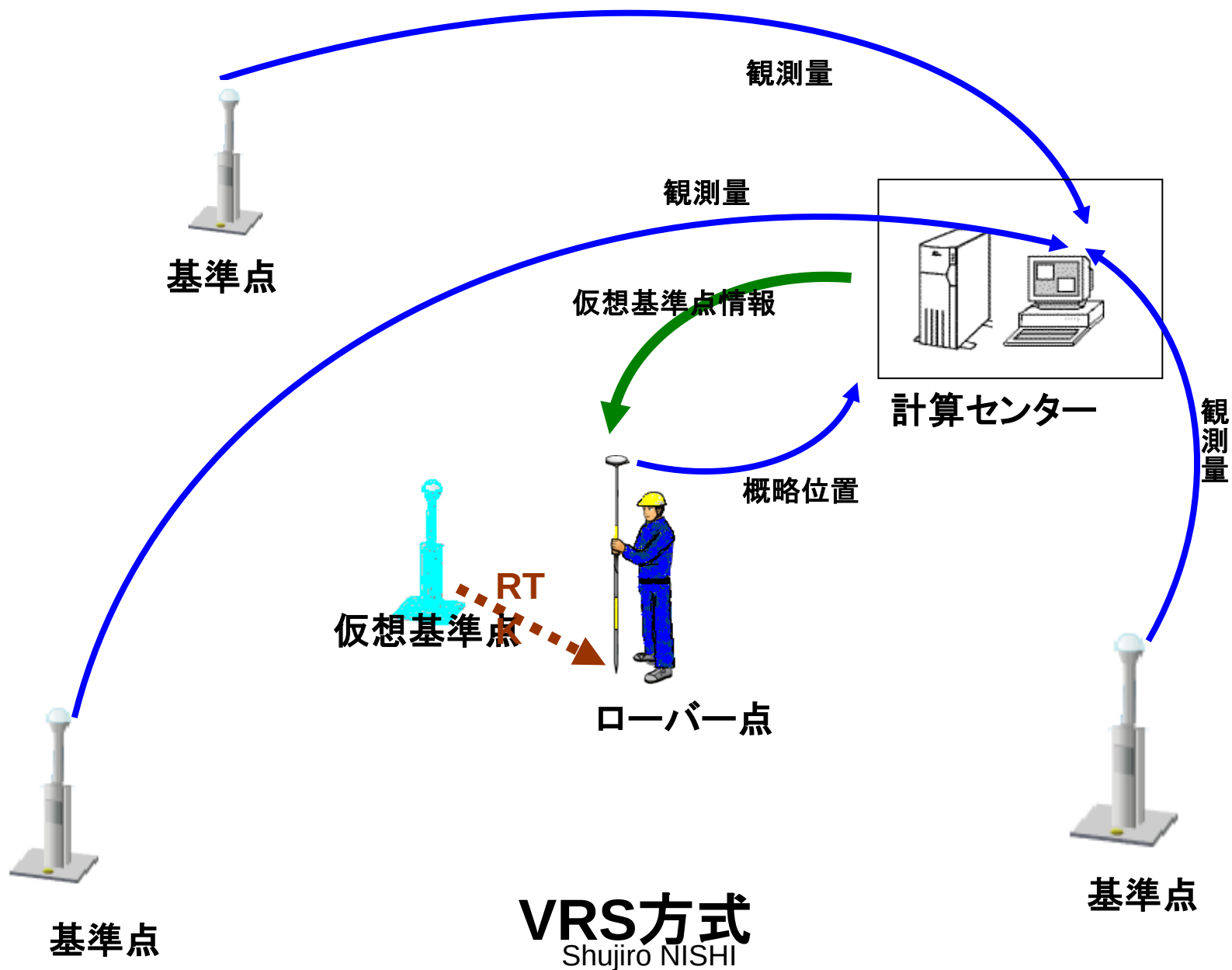
領域内の線形誤差モデル

各基準点での誤差から領域内の誤差を推定
分散性誤差と非分散性誤差それぞれに行なう



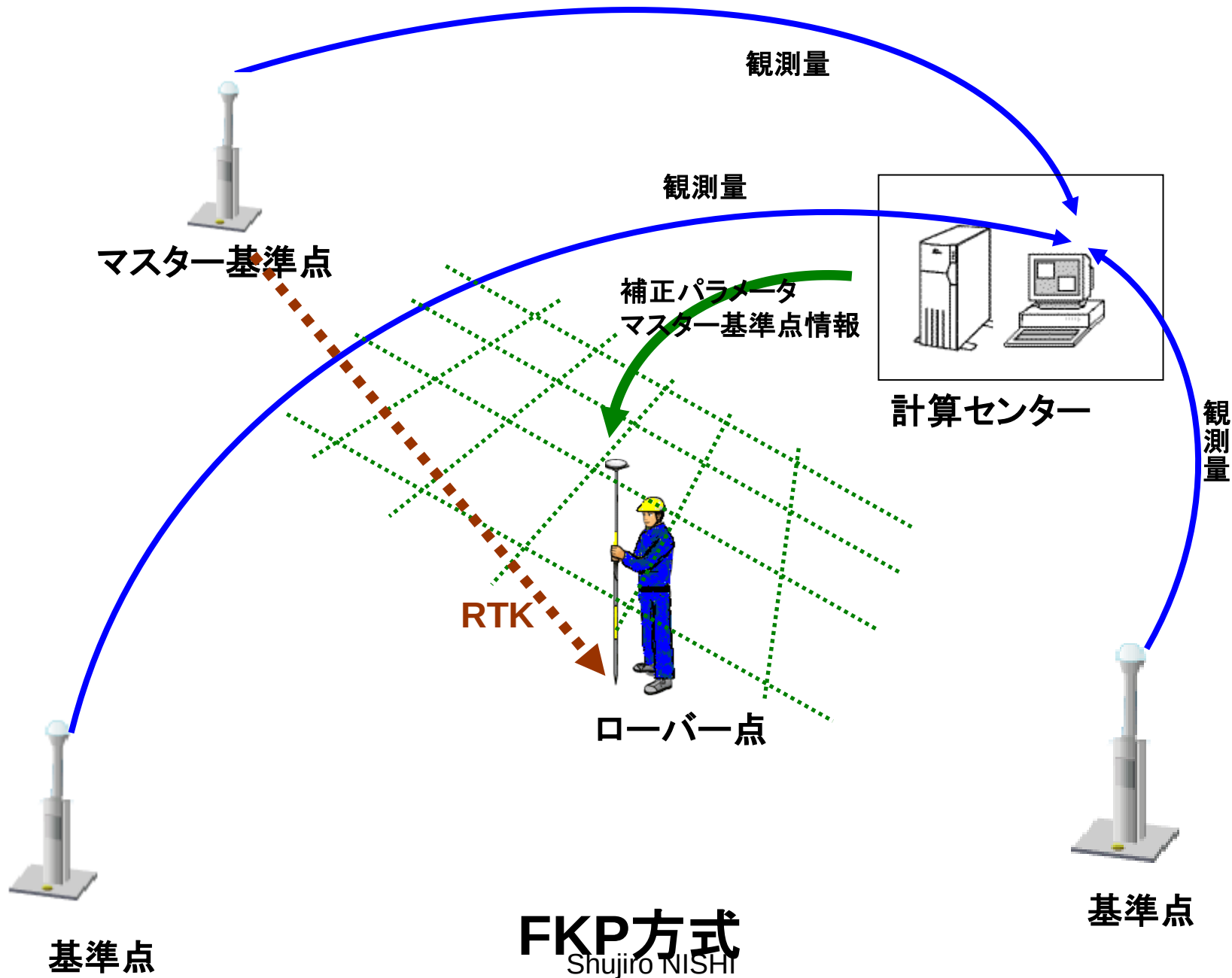
VRS(データの流れ)

- ローバー点 : 概略位置座標→センター
- センター : 概略位置(仮想基準点位置)での
仮想観測量の計算
→ローバー点
- ローバー点 : 観測値と送られてきた仮想観測
量を使って仮想基準点との間で
RTK測位



FKP(データの流れ)

- センター : 誤差を地域内の位置の一次関数で表す。この関数の係数(FKP)とマスター基準点の観測情報→ローバー点
- ローバー点 : 送られてきたデータでローバー点とマスター基準点の観測量を補正し、ローバー点とマスター基準点との間でRTK測位



ネットワーク型RTK データ伝送

- VRS(往復通信)
往:ローバー一点の概略座標
復:仮想観測量
- FKP(片道通信)
補正パラメータ、マスター基準点観測量
- 伝送方法
携帯電話,放送方式,専用無線等

ネットワーク型RTK-GPSの今後

- 電子基準点により全国均一なリアルタイム高精度測位サービスが普及
- GPS近代化やガリレオにより初期化改善
- ネットワーク型RTK-GPSの重要性増加

精密単独測位: PPP

コード観測の単独測位では、数メートルの測位精度しか期待できない。これに位相観測の単独測位を加えることにより、高精度化しようというのが、精密単独測位 (PPP) とよばれるものである。PPPでは2波長受信機を使うことにより電離層の影響を取り除き、その他の誤差についてはモデル化により対応している。

PPPの原理

電離層、対流圏を考慮した位相観測方程式は

$$\lambda\Phi = \rho + c\Delta\delta + \lambda N - \Delta^{Iono} + \Delta^{Trop}$$

となる。 またコード観測方程式は

$$R = \rho + c\Delta\delta + \Delta^{Iono} + \Delta^{Trop}$$

である。

それぞれ2周波で観測すれば、以下の観測方程式となる。

$$\lambda_1 \Phi_1 = \rho + c\Delta\delta + \lambda_1 N_1 - \Delta^{Iono}(f_1) + \Delta^{Trop}$$

$$\lambda_2 \Phi_2 = \rho + c\Delta\delta + \lambda_2 N_2 - \Delta^{Iono}(f_2) + \Delta^{Trop}$$

$$R_1 = \rho + c\Delta\delta + \Delta^{Iono}(f_1) + \Delta^{Trop}$$

$$R_2 = \rho + c\Delta\delta + \Delta^{Iono}(f_2) + \Delta^{Trop}$$

ここで電離層の影響は $\Delta^{Iono}(f) = +\frac{40.3}{f^2} TEC$

であることを考慮して式からこの項を消去すると

$$\left[\Phi_1 - \frac{f_2}{f_1} \Phi_2 \right] \frac{\lambda_1 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c\Delta\delta + \Delta^{Trop} + \left[N_1 - \frac{f_2}{f_1} N_2 \right] \frac{\lambda_1 f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

$$\left[R_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2} R_2 \right] \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c\Delta\delta + \Delta^{Trop}$$

が得られる。

この観測方程式から出発して、未知点座標を求めるのがPPPである。

この式には、対流圏誤差や時計誤差等その他の誤差が含まれている。PPPはこれらの誤差をモデル化してこの観測方程式を解く方法である。

PPPでは、いかに精度良くこれらをモデルするかが重要。