分散型カルマンフィルタの推定誤差解析

立命館大学　理工学研究科　電子システム専攻
システム制御工学研究室
○佐藤　祐樹，鷹羽　浄嗣

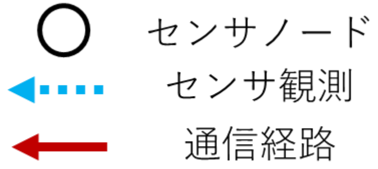
合意誤差が推定値に与える影響を解析する．
また合意の回数が無限大でなくても不偏推定値を計算できる手法を提案する．

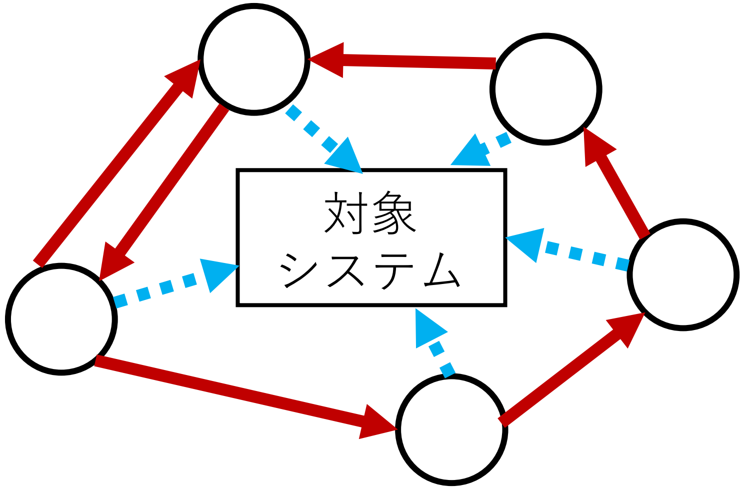
目次

はじめに

背景

センサや無線通信機器の小型化によりセンサネットワークに
関する技術が近年注目を集める





分散状態推定問題

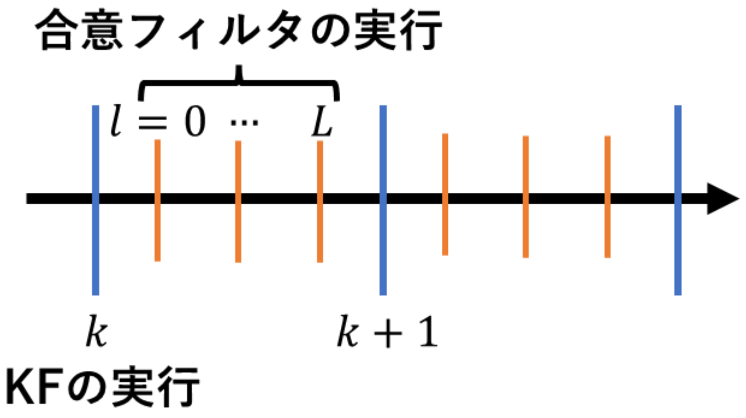
複数センサで得られた観測値から対象システムの状態を推定

分散型カルマンフィルタ(Distributed Kalman Filter; DKF)

分散型カルマンフィルタ

[R. O.-Saber, IEEE CDC, 2005]

KFの実行周期内に合意フィルタを実行し，
必要なデータを各センサノードで得ることで分散的に状態を推定



合意フィルタの実行回数は有限であり，実際には合意誤差が残る

本発表では　・ 推定誤差解析　・ 修正版DKFの提案

問題設定

N個のセンサノードで対象システムを観測し, 状態を推定することを考える

対象システムの状態方程式

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k)$$

状態の初期値　$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$

センサ$\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N})$の観測方程式

$$z_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k)$$

システム雑音, 観測雑音

平均値0の正規性白色雑音

$$\mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} w(k) \\ v_i(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(l) v_j^{\mathrm{T}}(l) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & R_i(k)\delta_{ij} \end{bmatrix} \delta_{kl}$$

δ_{kl} : クロネッカーのデルタ

仮定 1

(i) 各ノードは$A(k)$, $B(k)$, $\bar{x}_0$とP_0および$Q(k)$を事前に得ている

(ii) 各ノードは全ノードの$C_i(k)$および$R_i(k)$を事前に共有

通信ネットワーク

有向グラフ$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$で表現

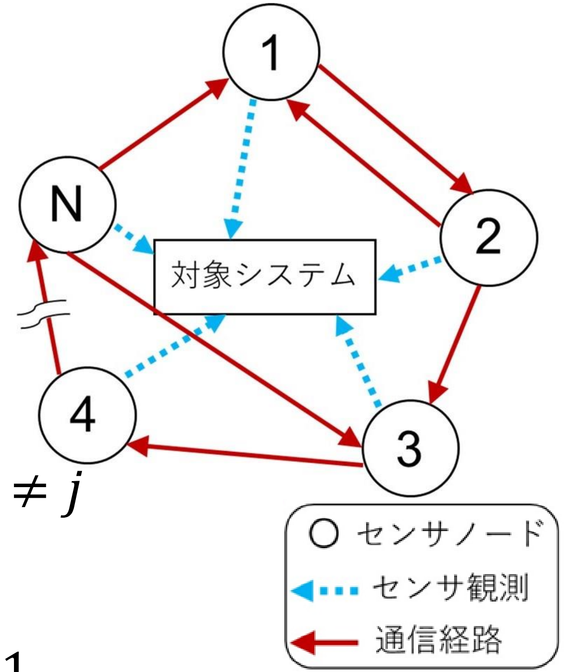
$\mathcal{V} = \{1,2,\dots,N\}$: 頂点集合

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$: 辺集合

$\mathcal{P}$: 重み付きペロン行列

$$\mathcal{P} = [p_{ij}], \begin{cases} p_{ij} > 0, & \text{if } (j,i) \in \mathcal{E}, i \neq j \\ p_{ij} = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$^\forall i, \sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad ^\forall j, \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$$



仮定 2

(i) グラフ$\mathcal{G}$のトポロジーは時不変

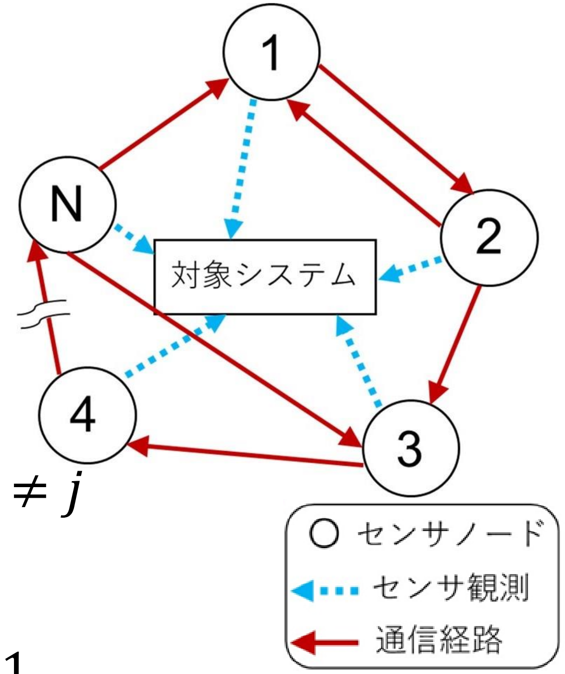
(ii) グラフ$\mathcal{G}$は強連結かつ平衡

仮定 3

各ノードは$\mathcal{P}$を事前に得ている

問題設定

N個のセンサノードで対象システムを観測し, 状態を推定することを考える



対象システムの状態方程式

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k)$$

状態の初期値　$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$

センサ$\boldsymbol{i}$ ($\boldsymbol{i = 1, \ldots, N}$)の観測方程式

$$z_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k)$$

システム雑音, 観測雑音

平均値0の正規性白色雑音

$$\mathbb{E}\left\{\begin{bmatrix} w(k) \\ v_i(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(l) v_j^{\mathrm{T}}(l) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q(k) & 0 \\ 0 & R_i(k)\delta_{ij} \end{bmatrix}\delta_{kl}$$

δ_{kl} : クロネッカーのデルタ

仮定 1

(i) 各ノードは$A(k)$, $B(k)$, $\bar{x}_0$とP_0および$Q(k)$を事前に得ている

(ii) 各ノードは全ノードの$C_i(k)$および$R_i(k)$を事前に共有

通信ネットワーク

有向グラフ$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{P})$で表現

$\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, N\}$: 頂点集合

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$: 辺集合

$\mathcal{P}$: 重み付きペロン行列

$$\mathcal{P} = [p_{ij}], \begin{cases} p_{ij} > 0, & \text{if } (j, i) \in \mathcal{E}, i \neq j \\ p_{ij} = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\forall i, \sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \quad \forall j, \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$$

仮定 2

(i) グラフ$\mathcal{G}$のトポロジーは時不変

時刻0から$\boldsymbol{k}$までの全センサノードの観測値のデータ集合に基づき, $\boldsymbol{x(k)}$の最小分散推定値を分散的に求める.

問題設定

この問題に対して, **集中型カルマンフィルタ**は適用できない(基地局が存在しないため)

⇒ そこで, 分散型カルマンフィルタを用い, 集中型に近い推定値を得ることを考える.

各ノードにカルマンフィルタ(マイクロカルマンフィルタ)を設ける.

集中型

事後推定値

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + M(k)\{\boxed{C_c^{\mathrm{T}}(k)R_c^{-1}(k)z_c(k)} - \boxed{C_c^{\mathrm{T}}(k)R_c^{-1}(k)C_c(k)}\bar{x}(k)\}$$

事後誤差共分散

$$M(k) = \{P^{-1}(k) + \boxed{C_c^{\mathrm{T}}(k)R_c^{-1}(k)C_c(k)}\}^{-1}$$

事前推定値

$$\bar{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k)$$

事前誤差共分散

$$P(k+1) = A(k)M(k)A^{\mathrm{T}}(k) + B(k)Q(k)B^{\mathrm{T}}(k)$$

分散型

事後推定値

$$\hat{x}_i{}^{\mu}(k) = \bar{x}_i{}^{\mu}(k) + M_{\mu}(k)\{\boxed{y(k)} - \boxed{S(k)}\bar{x}_i{}^{\mu}(k)\}$$

マイクロカルマンゲイン

$$M_{\mu}(k) = \{P_{\mu}^{-1}(k) + \boxed{S(k)}\}^{-1}$$

事前推定値

$$\bar{x}_i{}^{\mu}(k+1) = A(k)\hat{x}_i{}^{\mu}(k)$$

事前誤差共分散

$$P_{\mu}(k+1) = A(k)M_{\mu}(k)A^{\mathrm{T}}(k) + B(k)Q_{\mu}(k)B^{\mathrm{T}}(k)$$

$C_c^{\mathrm{T}}(k)R_c^{-1}(k)z_c(k)$, $C_c^{\mathrm{T}}(k)R_c^{-1}(k)C_c(k)$以外は各ノードのもつ情報で計算可能.
これら二つは, 代わりに平均合意で求めることで, 推定を行う.
ただし, 問題設定より, $y(k)$のみを合意により求める.

問題設定

アルゴリズム:　分散型カルマンフィルタ(ノードi) [R. O.-Saber, IEEE CDC, 2005]

1. **初期化**

事前推定値 $\bar{x}_i{}^{\mu}(0) = \bar{x}_0$　　事前誤差共分散 $P_\mu(0) = NP_0$

加重平均観測値

$$y(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i^{\mathrm{T}}(k)R_i^{-1}(k)z_i(k)$$

2. **合意フィルタの実行　(時刻(k))**

$$y_{i,0}^{k} = C_i^{T}(k)R_i^{-1}(k)z_i(k)$$

$l = 0$からLまで繰り返す

$$y(k) \leftarrow y_{i,l+1}^{k} = y_{i,l}^{k} + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} p_{ij}\left(y_{j,l}^{k} - y_{i,l}^{k}\right)$$

3. **マイクロカルマンフィルタの観測更新**

$$\hat{x}_i{}^{\mu}(k) = \bar{x}_i{}^{\mu}(k) + M_\mu(k)\{y(k) - S(k)\bar{x}_i{}^{\mu}(k)\}$$

$$M_\mu(k) = \left\{P_\mu^{-1}(k) + S(k)\right\}^{-1}$$

平均逆共分散

$$S(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i^{\mathrm{T}}(k)R_i^{-1}(k)C_i(k)$$

4. **マイクロカルマンフィルタの時間更新**

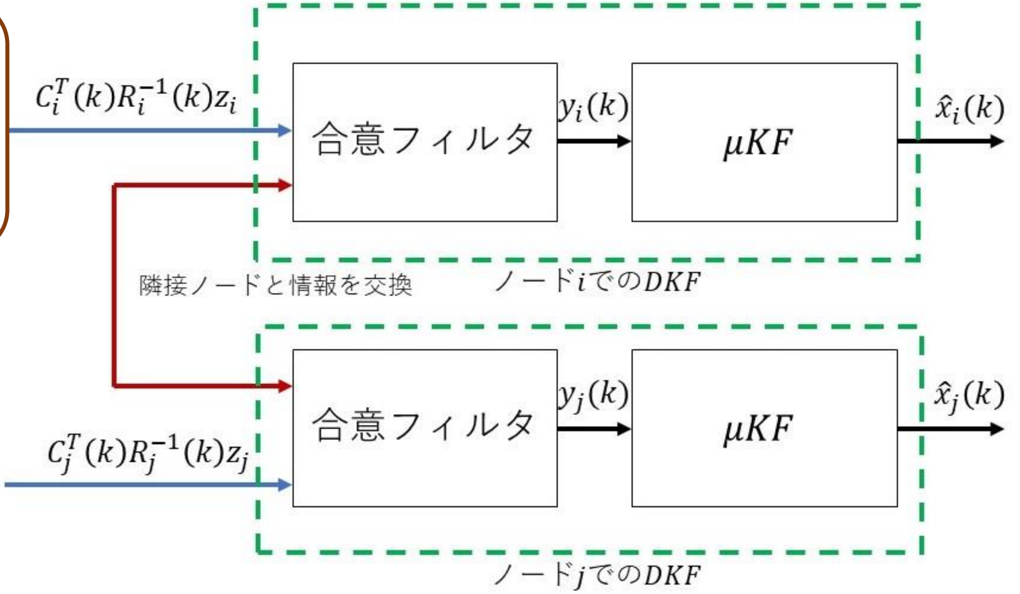
$$\bar{x}_i{}^{\mu}(k+1) = A(k)\hat{x}_i{}^{\mu}(k)$$

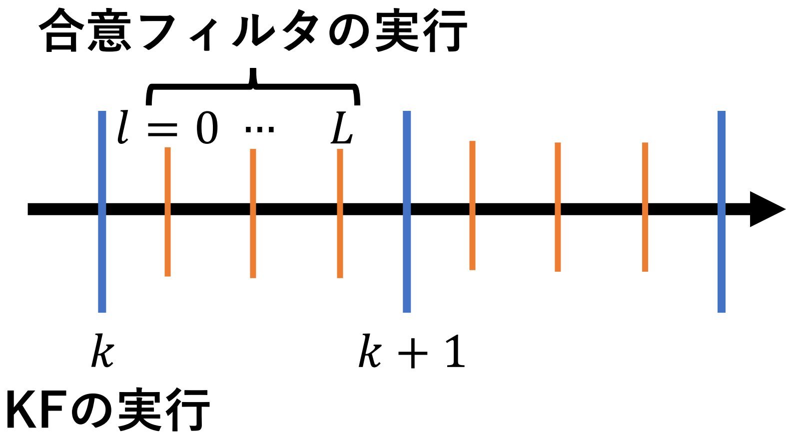
$$P_\mu(k+1) = A(k)M_\mu(k)A^{\mathrm{T}}(k) + B(k)Q_\mu(k)B^{\mathrm{T}}(k)$$

$Q_\mu(k) = NQ(k)$

5. **時刻を$k \to k+1$にして, 2へ戻る**

$\mathcal{N}_i \coloneqq \{j \in \mathcal{V}: (j,i) \in \mathcal{E}\}$





問題設定

アルゴリズム:　分散型カルマンフィルタ(ノードi)　[R. O.-Saber, IEEE CDC, 2005]

1. **初期化**

事前推定値 $\bar{x}_i{}^{\mu}(0) = \bar{x}_0$　事前誤差共分散 $P_{\mu}(0) = NP_0$

2. **合意フィルタの実行　(時刻(k))**

$$y_{i,0}^k = C_i^T(k)R_i^{-1}(k)z_i(k)$$

$l = 0$からLまで繰り返す

$$y(k) \leftarrow y_{i,l+1}^k = y_{i,l}^k + \sum_{j\in\mathcal{N}_i} p_{ij}\,(y_{j,l}^k - y_{i,l}^k)$$

加重平均観測値

$$y(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i^{\mathrm{T}}(k)R_i^{-1}(k)z_i(k)$$

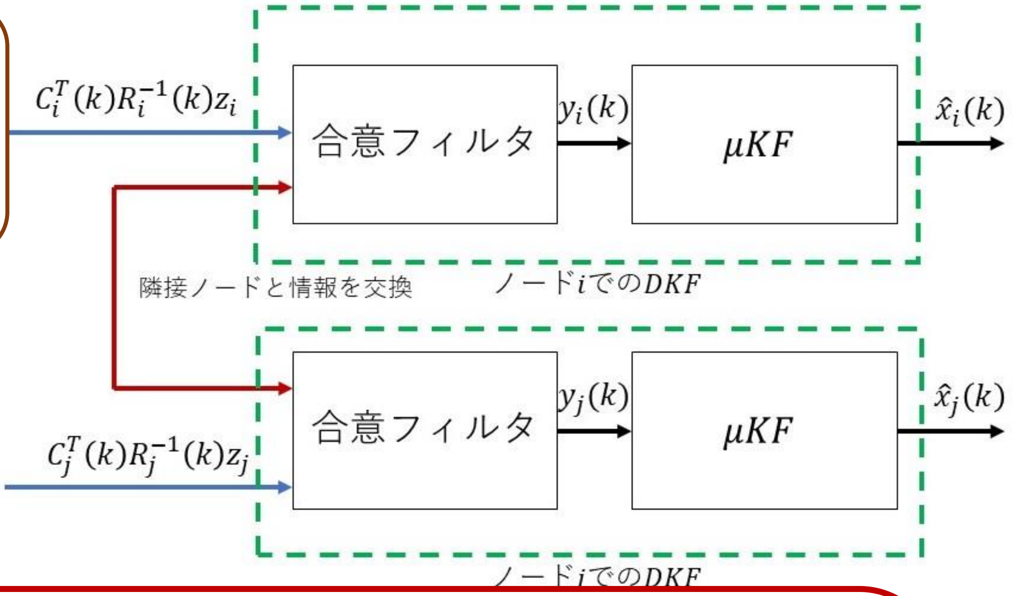
3. **マイクロカルマンフィルタの観測更新**

4. **マ**

P

5. **時刻を$k \rightarrow k+1$にして, 2へ戻る**　$\mathcal{N}_i := \{j \in \mathcal{V}: (j,i) \in \mathcal{E}\}$

KFの実行



合意を∞回実行できれば, 集中型と同じ推定値を得られるが, 実際は有限回しか実行できず, 合意誤差が残る.

1. 合意誤差が推定値へ与える影響の解析

2. 合意が有限回でも不偏推定値を計算できる手法の提案

合意誤差に基づく推定誤差解析

有限回実行したときの合意フィルタ

$$y_{i,0}^k = C_i^T(k) R_i^{-1}(k) z_i(k)$$

$l = 0$からLまで繰り返す

$$y(k) \leftarrow y_{i,l+1}^k = y_{i,l}^k + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_{ij} \left(y_{j,l}^k - y_{i,l}^k\right)$$

$y_l^k = \mathrm{col}(y_{1,l}^k, y_{2,l}^k, \ldots, y_{N,l}^k)$と置く.

$$y_{l+1}^k = (\mathcal{P} \otimes I_n) y_l^k$$

L回反復時は, $y_L^k = (\mathcal{P}^L \otimes I_n) y_0^k$

[R. O.-Saber, et al., Proc. of the IEEE, 2007]

センサノードiで利用可能な観測情報

$$\eta_i(k) = y_{i,L}^k = \sum_{j=1}^N \pi_{ij}^{(L)} C_i^T(k) R_i^{-1}(k) z_i(k)$$

$\pi_{ij}^{(L)}$: $\mathcal{P}^L$の(i,j)-成分

アルゴリズム:　合意誤差を含むマイクロカルマンフィルタ(μKF′)

観測更新

$$\hat{x}_i(k) = \bar{x}_i(k) + M_\mu(k)\{\boxed{\eta_i(k)} - S(k)\bar{x}_i(k)\}$$

$$M_\mu(k) = \left\{P_\mu^{-1}(k) + S(k)\right\}^{-1}$$

合意誤差$\tilde{y}_i(k) = \eta_i(k) - y(k)$を含む, 観測情報$\eta_i(k)$で推定

推定値への影響は…?

時間更新

$$\bar{x}_i(k+1) = A(k)\hat{x}_i(k)$$

$$P_\mu(k+1) = A(k) M_\mu(k) A^{\mathrm{T}}(k) + B(k) Q_\mu(k) B^{\mathrm{T}}(k)$$

初期条件

$$\bar{x}_i(0) = \bar{x}_0$$

$$P_\mu(0) = N P_0$$

合意誤差に基づく推定誤差解析

合意誤差$\tilde{y}_i(k)$を含むときの事後状態推定誤差の期待値$\beta_i(k)$について調べる.

定理 1

合意誤差を含むμKFの事後状態推定誤差の期待値を$\beta_i(k) = \mathbb{E}[\hat{x}_i(k) - x(k)]$とすると,
つぎの差分方程式が成り立つ

$$\beta_i(k) = \Phi(k)\beta_i(k-1) + M_\mu(k)\mathbb{E}[\tilde{y}_i(k)]$$

$$\beta_i(0) = M_\mu(0)\mathbb{E}[\tilde{y}_i(0)]$$

ただし,

$$\Phi(k) \coloneqq \{I_n - M_\mu(k)S(k)\}A(k-1)$$

証明

(略)

定理1は, 合意誤差$\tilde{y}_i(k) = 0$でなければ誤差が蓄積し, 推定値の不偏性が損なわれることを示す. すなわち, 有限回の合意では不偏推定値とはならない.

合意誤差に基づく推定誤差解析

合意誤差を含むμKFの推定誤差共分散は次のように表される.

定理 2

合意誤差を含むμKFの事前推定誤差共分散を$P_i(k)$, 事後推定誤差共分散を$M_i(k)$とすると, その更新式は次のように表される.

$$M_i(k) = \{I - M_\mu(k)S_i(k)\}P_i(k)\{I - M_\mu(k)S_i(k)\}^{\mathrm{T}} + M_\mu(k)\sum_{j=1}^{N}\left(\pi_{ij}^{(L)}\right)^2 C_j^{\mathrm{T}}(k)R_j^{-1}(k)C_j(k)\,M_\mu(k)$$

$$P_i(k+1) = A(k)M_i(k)A^{\mathrm{T}}(k) + B(k)Q(k)B^{\mathrm{T}}(k)$$

ただし,

$$S_i(k) = \sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}^{(L)}C_j^{\mathrm{T}}(k)R_j^{-1}(k)C_j(k)$$

証明(略) 誤差共分散の定義より, 定理2が成り立つことを確認できる

集中型の更新式では$\frac{1}{N}$となっているところが, 分散型では$\pi_{ij}^{(L)}$となっている.
すなわち, 合意の回数を∞にすることで集中型の誤差共分散に収束する.

修正版分散型カルマンフィルタ

合意誤差$\tilde{y}_i(k)$の期待値を各時刻で除去することで推定値の不偏性を回復

合意誤差$\tilde{y}_i(k)$の期待値

$$\mathbb{E}[\tilde{y}_i(k)] = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\boxed{\left(\pi_{ij}^{(L)} - \frac{1}{N}\right) C_i^T(k) R_i^{-1}(k) C_i(k)}}_{\Gamma_i(k)} \underbrace{\boxed{\mathbb{E}[x(k)]}}_{\bar{x}_i(k)\text{で代用}}$$

仮定1, 3から, 各ノードで計算可能

は, 各ノードで利用可能.

<u>アルゴリズム: バイアス補償型マイクロカルマンフィルタ(β-μKF)</u>

$\eta_i(k)$を用いるために生じるバイアスを補償し, 推定値の不偏性を回復

(数学的帰納法により確認)

観測更新

$$\hat{x}_i(k) = \bar{x}_i(k) + M_\mu(k)\{\eta_i(k) - S(k)\bar{x}_i(k)\} \underbrace{\boxed{- M_\mu(k)\Gamma_i(k)\bar{x}_i(k)}}_{\text{バイアス補償項}}$$

$$M_\mu(k) = \left\{P_\mu^{-1}(k) + S(k)\right\}^{-1}$$

時間更新

$$\bar{x}_i(k+1) = A(k)\hat{x}_i(k)$$

$$P_\mu(k+1) = A(k)M_\mu(k)A^{\mathrm{T}}(k) + B(k)Q_\mu(k)B^{\mathrm{T}}(k)$$

初期条件

$$\bar{x}_i(0) = \bar{x}_0$$

$$P_\mu(0) = NP_0$$

シミュレーション

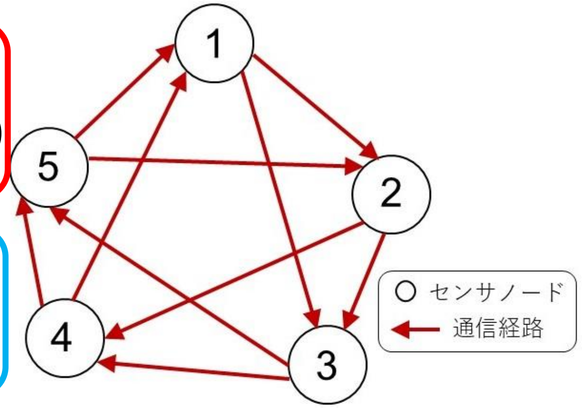
先行研究と提案法を比較し，有効性を確認

対象システムの状態方程式

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k)$$

センサi $(i = 1, \dots, 5)$の観測方程式

$$z_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k)$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{3}\Delta t \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\pi}{3}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$B = I_5,$

$C_1(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1],$

$C_2(k) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1],$

$C_3(k) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], C_4(k) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1], C_5(k) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$

シミュレーション時間	$18\ [s]$
サンプリング周期	$\Delta t = 0.06\ [s]$
合意フィルタゲイン	$\varepsilon = 1.1 \times 10^{-3}$
ネットワーク重み	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (j,i) \in \mathcal{E}, i \neq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
合意フィルタ反復回数	$L = 50$ [回]
初期状態	$\bar{x}_0 = [100, 100, 100, 100, 100]$
初期誤差共分散行列	$P_0 = I_5$

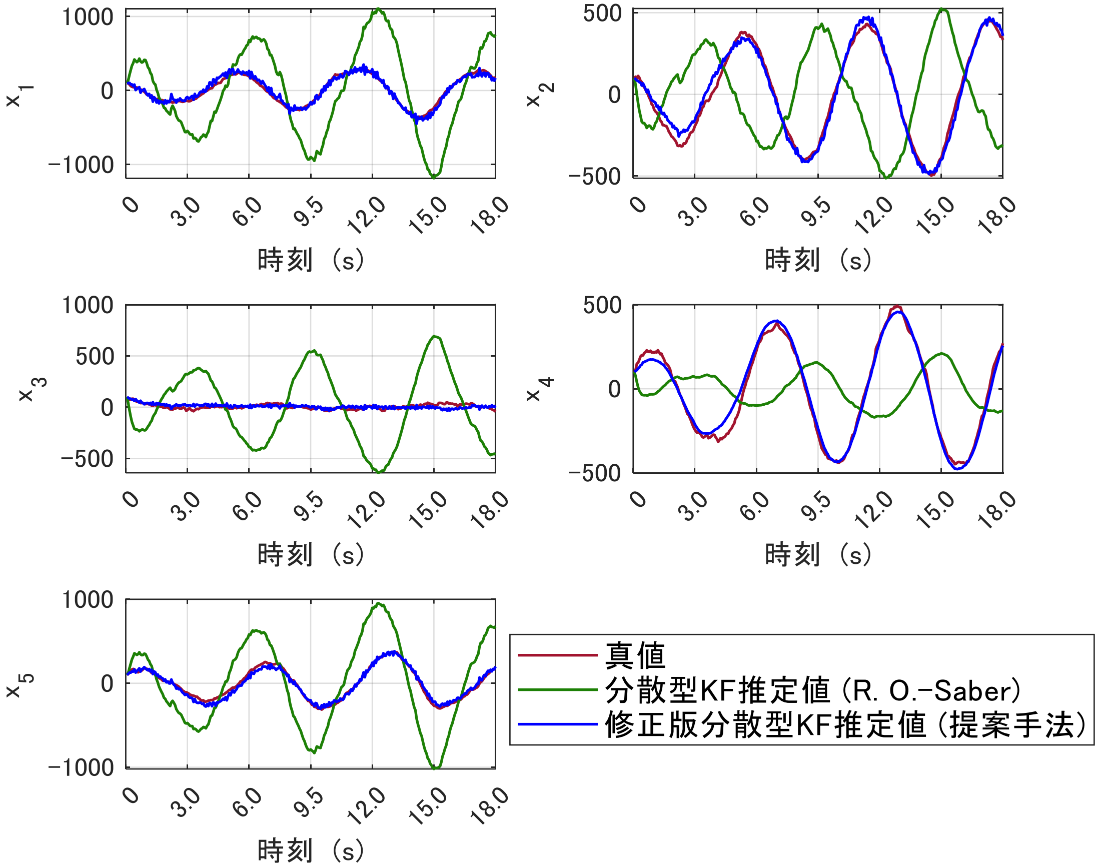
$x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5]^{\mathrm{T}}$

雑音の共分散

$Q = 65 I_5$

$R_1 = R_2 = R_3 = 730$

$R_4 = R_5 = 720$



推定結果（ノード1）

提案手法は先行研究に比べ，
推定精度が高い

シミュレーション

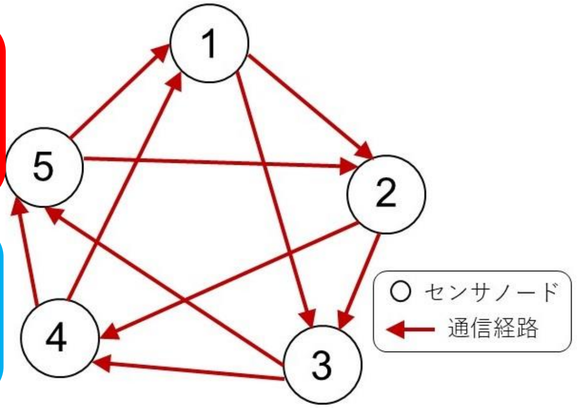
集中型と分散型(先行研究)の誤差共分散を比較

対象システムの状態方程式

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k)$$

センサi $(i = 1, \ldots, 5)$の観測方程式

$$z_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k)$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\pi}{3}\Delta t \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\pi}{3}\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\pi}{3}\Delta t & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = I_5,$$

$$C_1(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1],$$

$$C_2(k) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1],$$

$$C_3(k) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], C_4(k) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1], C_5(k) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1]$$

シミュレーション時間	$18\ [s]$
サンプリング周期	$\Delta t = 0.06\ [s]$
合意フィルタゲイン	$\varepsilon = 1.1 \times 10^{-3}$
ネットワーク重み	$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (j,i) \in \mathcal{E}, i \neq j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
合意フィルタ反復回数	$L = 50$ [回]
初期状態	$\bar{x}_0 = [100, 100, 100, 100, 100]$
初期誤差共分散行列	$P_0 = I_5$

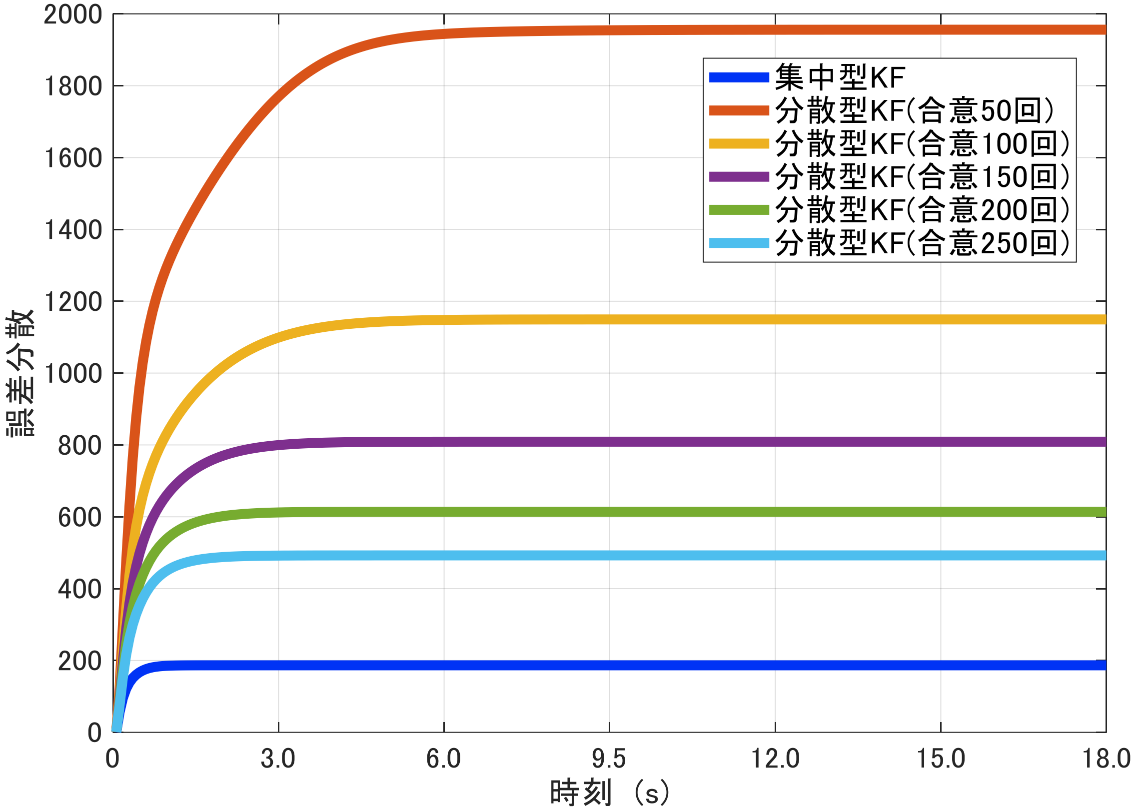
$$x = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4 \ \ x_5]^{\mathrm{T}}$$

雑音の共分散

$$Q = 65 I_5$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 730$$

$$R_4 = R_5 = 720$$



ノード1におけるx_1の事後推定誤差分散

分散型の$\mathbb{E}[|x_1(k) - \hat{x}(k)|^2]$ は,
合意の回数を増やすことで集中型の
分散に収束.

おわりに

本発展では

分散型カルマンフィルタにおいて, 合意誤差により推定値の不偏性が失われること,
およびそのときの推定誤差共分散の更新式

を示した. また,

合意誤差によるバイアスを補償する, 修正版分散型カルマンフィルタを提案した.

<u>今後の課題</u>

・　無香料カルマンフィルタなどの, 非線形カルマンフィルタの分散化